

## Examen du 6 septembre 2005

*Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée. Tout document interdit.  
Les téléphones portables doivent être éteints.*

*Les exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.*

### Rédigez les deux parties sur deux copies séparées Mathématiques

#### I. Racines sixièmes complexes de 1.

On sait que les six nombres complexes de la forme  $(\exp(i\pi/3))^p = \exp(ip\pi/3)$ , où  $p = 0, 1, 2, \dots, 5$ , sont les six racines sixièmes de 1.

On pose  $\omega = \exp(i\pi/3)$  et  $\omega^p = \exp(ip\pi/3)$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots, 5$ .

1. Dans le plan complexe placer les six racines sixièmes de 1.
2. Pour toutes les combinaisons de signe

a. Calculer  $\left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^2$  ;

b. Puis vérifier que  $\left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$  ;

3. En utilisant le schéma demandé dans la question 1,
  - a. identifier chacune des quatre valeurs obtenues en 2a à l'un des nombres  $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ .
  - b. On pose  $\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \rho e^{i\theta}$  ; calculer  $\rho$  et  $\theta$  pour toutes les combinaisons de signe.

II. On s'intéresse à la croissance des bactéries Bacillus dendroïdes. On appelle  $y$  la surface de la colonie en  $\text{cm}^2$  et  $x$  son âge en jours. On suppose que  $y$  est une fonction de  $x$ . On suppose que le taux d'accroissement de la surface de la colonie s'écrit

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{y} = r - ky \quad (1)$$

où  $r$  est un terme strictement positif constant qui traduit l'accroissement par division cellulaire et où le terme négatif,  $-ky$ , proportionnel à l'effectif des bactéries, traduit le rôle inhibiteur de ces dernières ( $k$  est une constante strictement positive).

- 1- Montrer que la fonction  $y(x) = \frac{r/k}{1 + \exp(-rx)}$  est solution de (1).
- 2- Etudier la variation de cette fonction suivant la valeur de  $x$  sachant que  $r = 2 \text{ jour}^{-1}$  et  $k = 0.4 \text{ jour}^{-1} \text{cm}^{-2}$ . Quelle est la limite de  $y(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini ? Tracer la courbe représentative de  $y(x)$ .
- 3- En l'absence d'inhibition mutuelle des bactéries,  $k = 0$ . On appelle dans ce cas  $Y$  la surface de la colonie. Elle satisfait l'équation (1) simplifiée  $\frac{1}{Y} \frac{dY}{dx} = r$  que l'on peut écrire aussi :

$$\frac{dY}{Y} = r dx \quad (2)$$

Calculer la primitive de chaque membre de l'équation (2). En déduire l'expression de  $Y(x)$ .  
Quelle est la nouvelle limite de la surface de la colonie quand  $x$  tend vers l'infini?

## Statistiques

### III. Probabilités et variables aléatoires discrètes

La fréquence d'apparition chez l'homme d'un caractère génétique A est de 0,1 et celle d'un caractère B est de 0,3. La probabilité d'observer l'un ou l'autre de ces caractères chez un individu est de 0,37.

*Définir soigneusement les évènements considérés avant d'en calculer la probabilité.*

1. Calculer la probabilité d'apparition des deux caractères chez un même individu.
2. L'apparition de l'un des deux caractères est-elle indépendante de l'apparition de l'autre ?
3. Dans un échantillon de  $n = 100$  personnes, quelle est la loi de distribution du nombre  $X$  d'individus présentant les caractères A et B ?
4. Par quelle loi plus simple d'utilisation peut-on approcher la loi précédente ?
5. Utiliser cette loi approchée pour calculer les probabilités  $p(X=k)$  pour  $k$  allant de 0 à 8. Représenter leur histogramme.

### IV. Estimation ponctuelle et loi normale

L'agent pathogène responsable de la maladie de Creutzfeld-Jacob est la protéine prion. Dans des conditions encore incomplètement comprises, la forme native du prion peut adopter une conformation pathogène entraînant une mort neuronale massive. La densité de neurones (exprimée en centaines de cellules par  $\text{mm}^3$ ) a été étudiée dans le cortex de rat de deux échantillons :

échantillon  $P$  : rats auxquels on a injecté la version pathogène de la protéine *prion*  
échantillon  $T$  : rats témoins

Echantillon	$P$	$T$
1	$460 \cdot 10^2$	$973 \cdot 10^2$
2	$341 \cdot 10^2$	$1181 \cdot 10^2$
3	$641 \cdot 10^2$	$789 \cdot 10^2$
4	$512 \cdot 10^2$	$912 \cdot 10^2$
5	$447 \cdot 10^2$	$1247 \cdot 10^2$
6	$599 \cdot 10^2$	$898 \cdot 10^2$

1. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la densité de neurones dans chaque échantillon.
2. Une étude sur un grand échantillon a montré que la densité de neurones corticaux (que l'on symbolisera par la variable aléatoire  $X$ ) se distribue chez les rats sains de façon normale avec une moyenne  $\mu = 1000 \times 10^2$  neurones/ $\text{mm}^3$  et un écart-type  $\sigma = 100 \cdot 10^2$  neurones/ $\text{mm}^3$ . Quelle serait la probabilité d'observer des densités aussi faibles que celles de l'échantillon P si l'injection de prions n'avait aucun effet sur la densité de neurones corticaux ?

*Note : on ne cherchera à effectuer ni correction de continuité ni interpolation dans la table de la loi normale.*

## Table de la loi normale centrée-réduite

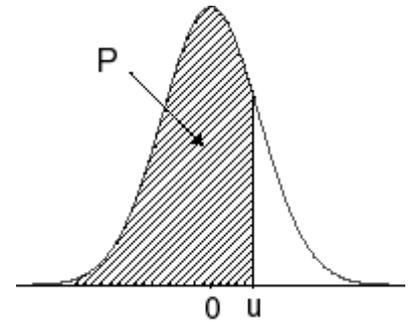
La table indique, pour  $u \geq 0$ , la valeur  $F(u)$  de la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite définie par

$$F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Pour  $u < 0$ ,  $F(u) = 1 - F(-u)$ .

La table retourne la valeur de  $F(u)$  pour la valeur de  $u$  lue comme la somme des valeurs figurant en tête de la ligne et de la colonne correspondantes. Ex. :

$$u = 0,83 = 0,8 + 0,03 \rightarrow F(u) = 0,7967.$$



$u$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9 <sup>3</sup> 03	0,9 <sup>3</sup> 06	0,9 <sup>3</sup> 10	0,9 <sup>3</sup> 13	0,9 <sup>3</sup> 16	0,9 <sup>3</sup> 18	0,9 <sup>3</sup> 21	0,9 <sup>3</sup> 24	0,9 <sup>3</sup> 26	0,9 <sup>3</sup> 29
3,2	0,9 <sup>3</sup> 31	0,9 <sup>3</sup> 34	0,9 <sup>3</sup> 36	0,9 <sup>3</sup> 38	0,9 <sup>3</sup> 40	0,9 <sup>3</sup> 42	0,9 <sup>3</sup> 44	0,9 <sup>3</sup> 46	0,9 <sup>3</sup> 48	0,9 <sup>3</sup> 50
3,3	0,9 <sup>3</sup> 52	0,9 <sup>3</sup> 53	0,9 <sup>3</sup> 55	0,9 <sup>3</sup> 57	0,9 <sup>3</sup> 58	0,9 <sup>3</sup> 60	0,9 <sup>3</sup> 61	0,9 <sup>3</sup> 62	0,9 <sup>3</sup> 64	0,9 <sup>3</sup> 65
3,4	0,9 <sup>3</sup> 66	0,9 <sup>3</sup> 68	0,9 <sup>3</sup> 69	0,9 <sup>3</sup> 70	0,9 <sup>3</sup> 71	0,9 <sup>3</sup> 72	0,9 <sup>3</sup> 73	0,9 <sup>3</sup> 74	0,9 <sup>3</sup> 75	0,9 <sup>3</sup> 76
3,5	0,9 <sup>3</sup> 77	0,9 <sup>3</sup> 78	0,9 <sup>3</sup> 78	0,9 <sup>3</sup> 79	0,9 <sup>3</sup> 80	0,9 <sup>3</sup> 81	0,9 <sup>3</sup> 81	0,9 <sup>3</sup> 82	0,9 <sup>3</sup> 83	0,9 <sup>3</sup> 83
3,6	0,9 <sup>3</sup> 84	0,9 <sup>3</sup> 85	0,9 <sup>3</sup> 85	0,9 <sup>3</sup> 86	0,9 <sup>3</sup> 86	0,9 <sup>3</sup> 87	0,9 <sup>3</sup> 87	0,9 <sup>3</sup> 88	0,9 <sup>3</sup> 88	0,9 <sup>3</sup> 89
3,7	0,9 <sup>3</sup> 89	0,9 <sup>3</sup> 90	0,9 <sup>4</sup> 00	0,9 <sup>4</sup> 04	0,9 <sup>4</sup> 08	0,9 <sup>4</sup> 12	0,9 <sup>4</sup> 15	0,9 <sup>4</sup> 18	0,9 <sup>4</sup> 22	0,9 <sup>4</sup> 25
3,8	0,9 <sup>4</sup> 28	0,9 <sup>4</sup> 31	0,9 <sup>4</sup> 33	0,9 <sup>4</sup> 36	0,9 <sup>4</sup> 38	0,9 <sup>4</sup> 41	0,9 <sup>4</sup> 43	0,9 <sup>4</sup> 46	0,9 <sup>4</sup> 48	0,9 <sup>4</sup> 50
3,9	0,9 <sup>4</sup> 52	0,9 <sup>4</sup> 54	0,9 <sup>4</sup> 56	0,9 <sup>4</sup> 58	0,9 <sup>4</sup> 59	0,9 <sup>4</sup> 61	0,9 <sup>4</sup> 63	0,9 <sup>4</sup> 64	0,9 <sup>4</sup> 66	0,9 <sup>4</sup> 67

N.B. : La notation 0,9<sup>3</sup>03, par exemple, équivaut à 0,99903.