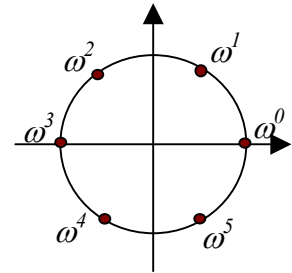


Corrigé de l'examen du 6 septembre 2005

Mathématiques

I. Racines sixièmes complexes de 1.

$\omega = \exp(i\pi/3)$ et $\omega^p = \exp(ip\pi/3)$, $p = 0, 1, 2, \dots, 5$.



1.

$$2. \quad a. \left(\pm \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\pm \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b. \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$3. \quad a. \left(\pm \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = e^{i2\pi/3} \text{ et } \left(\pm \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = e^{-i2\pi/3}$$

$$b. \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i2\pi/3}$$

Tous ces nombres ont un module égal à 1 et leurs phases sont calculées à 2π près.

II. $y(x) = \frac{r/k}{1 + \exp(-rx)}$

$$1- \quad y'(x) = r/k \frac{-1}{(1 + \exp(-rx))^2} (-r \exp(-rx)) = r^2/k \frac{\exp(-rx)}{(1 + \exp(-rx))^2}$$

Donc $\frac{y'(x)}{y(x)} = r \frac{\exp(-rx)}{1 + \exp(-rx)}$ et

$$r - ky(x) = r - \frac{r}{1 + \exp(-rx)} = r \frac{\exp(-rx)}{1 + \exp(-rx)}$$

$$2- \quad y(x) = \frac{5}{1 + \exp(-2x)}. \quad \text{La dérivée calculée ci-dessus}$$

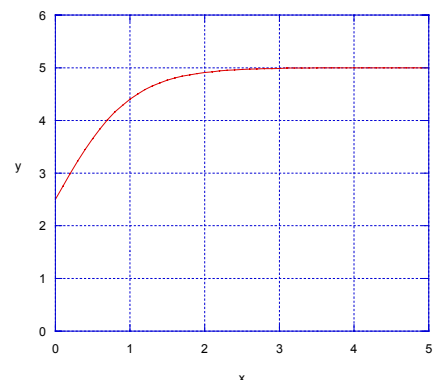
est toujours positive si r/k est positif. Donc la fonction est croissante.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 5$$

$$3- \quad \int \frac{dY}{Y} = \int r dx \quad \text{ce qui donne } \ln Y = rx + \text{constante}$$

ou encore $\ln \frac{Y}{Y_0} = rx$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = +\infty$. Sans l'effet inhibiteur la population par unité de

surface devient infinie. Cet effet est donc indispensable pour une description réaliste de la population.



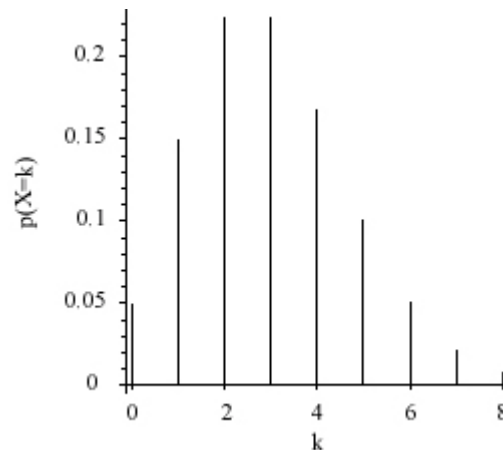
Statistiques

III. Probabilités et variables aléatoires discrètes

1. Théorème des probabilités totales : $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,1 + 0,3 - 0,37 = 0,03$
2. $p(A)p(B) = 0,1 \times 0,3 = 0,03 = p(A \cap B) \rightarrow$ les deux événements sont indépendants
3. X : variable aléatoire représentant le nombre d'individus présentant les caractères A et B dans un groupe de 100 personnes. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 3\%$, soit $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$
4. $n > 50$ et la probabilité de l'événement élémentaire $p < 5\% \rightarrow$ on peut approximer la distribution binomiale par la loi de Poisson $P(X = k) = e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$

5.
4.

$$\begin{aligned} p(0) &= 0.049 \\ p(1) &= 0.149 \\ p(2) &= 0.224 \\ p(3) &= 0.224 \\ p(4) &= 0.168 \\ p(5) &= 0.101 \\ p(6) &= 0.050 \\ p(7) &= 0.022 \\ p(8) &= 0.008 \end{aligned}$$



IV. Estimation ponctuelle et loi normale

1.

Lot P : Moyenne = 500 millions de neurones par mm^3 Variance = 9919 (millions de neurones par mm^3) ² Ecart-type $\cong$ 100 millions de neurones par mm^3	Lot T : Moyenne = 1000 millions de neurones par mm^3 Variance = 26195 (millions de neurones par mm^3) ² Ecart-type $\cong$ 162 millions de neurones par mm^3
---	---

2. En l'absence d'effet du prion, la densité neuronale chez les rats injectés devrait suivre la même distribution que celle des rats sains. Le rat n°3 du lot P a la plus grande densité (641). On cherche donc $p(X < 641) = p(U < (641 - 1000)/100) = p(U < -3,59) = 1 - p(U < 3,59) = 1 - 0,99983 \cong 1,7/10000$.