Les documents ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On considère les intégrales :

$$n \in \mathbf{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} t)^{2n} dt.$$

1. Vérifier l'égalité : $I_n + I_{n+1} = 1/(2n + 1)$.
2. Montrer que : $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
3. Dédire de ces résultats la somme de la série $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p / (2p + 1)$.

Exercice 2

1. On considère l'équation différentielle :

$$(1) \quad x^2 f'(x) + f(x) = x.$$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de (1), développable en série entière au voisinage de 0.

Déterminer la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. (On doit trouver une seule solution.) Est-elle convergente ?

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, étudier la convergence de l'intégrale suivante et la calculer :

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt.$$

3. On considère l'intégrale généralisée avec paramètre :

$$(2) \quad x \in \mathbf{R}^+, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + tx)^{-1} dt.$$

a) Calculer par récurrence les dérivées partielles $\partial^n u / \partial x^n$ de la fonction $u : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $u(x, t) = e^{-t} (1 + tx)^{-1}$.

b) Énoncer soigneusement un théorème de dérivation sous le signe somme pour les intégrales généralisées avec paramètre.

c) Montrer que (2) définit une fonction $g \in C^\infty([0, +\infty[)$ dont on peut calculer les dérivées $g^{(n)}(x)$ par dérivations sous le signe somme.

d) En déduire que $g^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4. Vérifier l'égalité :

$$x \in \mathbf{R}^+, \quad xg'(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + tx)^{-2} dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, qu'on justifiera soigneusement, montrer qu'on a :

$$x \in \mathbf{R}^+, \quad x \int_0^{+\infty} e^{-t} (1+tx)^{-2} dt = 1 - g(x).$$

5. Dédire des résultats précédents que la fonction $x \mapsto xg(x)$ est solution de l'équation (1) sur $\mathbf{R}^+$. Quelle est sa série de Taylor à l'origine ?

Exercice 3

1. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ et $\sin(x/2) \neq 0$, on a la formule :

$$(3) \quad \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} = e^{inx/2} \sum_{k=0}^n e^{-ikx}.$$

2. À tout $n \in \mathbf{N}$, on associe la fonction $q_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ définie par

$$(4) \quad n \in \mathbf{N}, \quad q_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \right)^2$$

si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et prolongée par continuité aux points $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Calculer $q_n(x)$ si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

b) Écrire q_n sous la forme d'un polynôme trigonométrique de degré n , c'est-à-dire sous la forme $q_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_{n,k} e^{ikx}$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} q_n(t) dt = 1.$$

3. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite q_n sur $[0, \pi]$ puis sur $[\delta, \pi]$, si $\delta \in]0, \pi[$ est un nombre réel donné.

4. On se donne de plus une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue, périodique de période 2π . On lui associe la suite des fonctions f_n définies par :

$$x \in \mathbf{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) q_n(x-t) dt.$$

a) Montrer que f_n est un polynôme trigonométrique de degré n .

b) Montrer qu'on a aussi :

$$x \in \mathbf{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) q_n(t) dt.$$

5. On note $M = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$. Soit $\delta \in]0, \pi[$. Démontrer l'inégalité :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| q_n(t) dt + \frac{2M}{(n+1)(\sin(\delta/2))^2},$$

En déduire que la suite f_n converge simplement vers f sur $\mathbf{R}$.