UNIVERSITÉ PARIS 6 **LM260** **2005-2006**

Corrigé de l'examen du 24 Janvier 2006

Exercice 1. — Pour $n \in \mathrm{N}$, on pose $I_n := \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^{2n} t\, dt$.

1) On a

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^{2n} t\, \mathrm{tg}' t\, dt = [\mathrm{tg}^{2n+1} t/(2n+1)]_{t=0}^{t=\pi/4} = 1/(2n+1).$$

2) On a $0 \le I_n \le I_n + I_{n+1} \le 1/(2n+1)$ donc $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) On a $I_0 = \pi/4$. On peut écrire :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p/(2p+1) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p (I_p + I_{p+1}) = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p/(2p+1) = \pi/4$.

Exercice 2. — On considère l'équation différentielle :

$$(1) \qquad x^2 f'(x) + f(x) = x.$$

1) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière convergente solution de (1). Sur l'intervalle ouvert de convergence, on peut dériver terme à terme . On obtient :

$$a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n-1)a_{n-1} + a_n) x^n = x.$$

On en déduit (unicité du développement en série entière) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et si $n \ge 2$: $a_n = -(n-1)a_{n-1}$. On obtient $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (n-1)!\, x^n$.
Comme $|a_{n+1}/a_n| = n$, le critère de d'Alembert montre que le rayon de convergence de cette série entière est nul. Donc, la série diverge et f n'existe pas.

2) Si $n \in \mathrm{N}$, on pose $J_n(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, t^n\, dt$ et $J_n := \lim_{x\to+\infty} J_n(x) \in [0, +\infty]$.
On a $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ donc $J_0 = 1$. Si $n \ge 1$, une intégration par parties donne :

$$J_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, t^n\, dt = [-\mathrm{e}^{-t} t^n]_{t=0}^{t=x} + n J_{n-1}(x).$$

Quand $x \to +\infty$, on obtient $J_n = n J_{n-1}$, puis, par récurrence, $J_n = n!$ pour tout n.

3) On considère l'intégrale généralisée avec paramètre :

$$(2) \qquad x \in \mathrm{R}^+, \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, (1+tx)^{-1}\, dt.$$

a) Il est clair que pour tout $t \ge 0$ fixé, la fonction $x \mapsto u(x,t) := \mathrm{e}^{-t}\,(1+tx)^{-1}$ est de classe C^∞ sur R^+. On calcule :

$$(x,t) \in \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+, \qquad \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n n!\, t^n \mathrm{e}^{-t}\, (1+tx)^{-n-1}.$$

Les fonctions $(x,t) \mapsto (-1)^n n!\, t^n \mathrm{e}^{-t}$ et $(x,t) \mapsto (1+tx)^{n+1}$ sont continues sur $\mathrm{R}\times\mathrm{R}$. Comme $(x,t) \mapsto 1 + xt$ ne s'annule pas sur $\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+$, on en déduit que $\partial^n u/\partial x^n$ est continue par rapport à (x,t) sur $\mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+$.

c) On a d'autre part, pour tout $n \in \mathrm{N}$:

$$(x,t) \in \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R}^+, \qquad \left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) \right| \le n!\, t^n \mathrm{e}^{-t},$$

où le second membre est indépendant de x et a une intégrale sur $[0, +\infty[$ convergente.

Par théorème, on en déduit que (2) définit une fonction $g \in C^\infty(\mathrm{R}^+)$ et qu'on peut dériver sous le signe somme à tous les ordres.

d) En particulier : $g^{(n)}(0) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^n\, dt = (-1)^n (n!)^2$.

4) On a

$$g(x) + xg'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1+tx)^{-1} dt - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} xt (1+tx)^{-2} dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1+tx)^{-2} dt.$$

Une intégration par parties donne :

$$x \int_0^T \mathrm{e}^{-t}\, (1+tx)^{-2}\, dt = [-\mathrm{e}^{-t}(1+tx)^{-1}]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \mathrm{e}^{-t}\, (1+tx)^{-1}\, dt.$$

Quand T tend vers $+\infty$, on obtient $x(xg'(x) + g(x)) = 1 - g(x)$.

5) La fonction $f \in C^\infty(\mathrm{R}^+)$ définie par $f(x) = xg(x)$ vérifie

$$x^2 f'(x) + f(x) = x^2 (xg'(x) + g(x)) + xg(x) = x.$$

C'est donc une solution de (1).

Si $n \geq 1$, on calcule par récurrence $f^{(n)}(x) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x)$. On a donc $f^{(n)}(0) = ng^{(n-1)}(0)$ puis $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}n!(n-1)!$. La série de Taylor de f à l'origine est la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^n$ considérée au début de l'exercice.

Exercice 3. — Si $n \in \mathbf{N}$ et $\sin x/2 \neq 0$, on pose :

$$q_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2. \tag{3}$$

1) Si $x \notin 2\pi\mathbf{Z}$:

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = e^{inx/2}\frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}} = e^{inx/2}\sum_{k=0}^{n} e^{-ikx},$$

(formule de la série géométrique).

2) On peut donc prolonger la fonction q_n à $\mathbf{R}$ par continuité en posant :

$$q_n(x) = \frac{1}{n+1}e^{inx}\Big(\sum_{k=0}^{n} e^{-ikx}\Big)^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{k,l=0}^{n} e^{i(n-k-l)x}. \tag{4}$$

a–b) En particulier, $q_n(0) = n+1$ et q_n est un polynôme trigonométrique de degré n.

c) Quand on on intègre le membre de droite de (4) entre $-\pi$ et π, les seules contributions $\neq 0$ proviennent des $(n+1)$ termes avec $k + l = n$ qui donnent chacun $2\pi/(n+1)$. On a donc $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} q_n(t)\,dt = 1$.

3) Comme $q_n(0) = n+1$, la suite q_n ne converge pas sur $[0,\pi]$. Si $0 < \delta \leq x \leq \pi$,

$$|q_n(x)| \leq (n+1)^{-1}(\sin x/2)^{-2} \leq (n+1)^{-1}(\sin\delta/2)^{-2}.$$

Le membre de droite est une suite indépendante de $x \in [\delta,\pi]$, qui converge vers 0. On en déduit que $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, uniformément sur $[\delta,\pi]$.

4) Soit $f \in C^0(\mathbf{R})$, 2π-périodique. Si $n \in \mathbf{N}$, on pose : $f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,q_n(x-t)\,dt$.

a) Comme q_n est un polynôme trigonométrique, soit $q_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_{n,k}e^{ikx}$, on a, par linéarité et en notant que $e^{ik(x-t)} = e^{ikx}e^{-ikt}$:

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_{n,k}\frac{e^{ikx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt,$$

un polynôme trigonométrique de degré n.

b) Le changement de variable $t = x + s$ donne $f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s)\,q_n(-s)\,ds$. Comme la fonction $s \mapsto f(x+s)\,q_n(-s)$ est 2π-périodique, son intégrale sur un segment de longueur 2π ne dépend pas du segment choisi. Comme d'autre part $q_n(-s) = q_n(s)$, on obtient :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)\,q_n(s)\,ds.$$

5) Soit $M := \sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|$. On remarque que $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)q_n(t)\,dt$. Par linéarité de l'intégrale et compte tenu du fait que q_n est positive, on a donc :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+s) - f(x))\,q_n(s)\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+s) - f(x)|\,q_n(s)\,ds.$$

Soit $0 < \delta < \pi$. On décompose l'intégrale du membre de droite suivant les segments $[-\delta,\delta]$, $[-\pi,-\delta]$ et $[\delta,\pi]$. Sur les deux derniers (dont les longueurs sont $< \pi$) on utilise la majoration :

$$|f(x+s) - f(x)|\,q_n(s) \leq (|f(x+s)| + |f(x)|)\,q_n(s) \leq 2M(n+1)^{-1}(\sin\delta/2)^{-2}.$$

On obtient ainsi :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+s) - f(x)|\,q_n(s)\,ds + 2M(n+1)^{-1}(\sin\delta/2)^{-2}.$$

Comme $(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} q_n(s)\,ds = 1$, on peut encore écrire :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{|s|\leq\delta}|f(x+s) - f(x)| + 2M(n+1)^{-1}(\sin\delta/2)^{-2}.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue au point x, on peut choisir $\delta > 0$ tel que le premier terme du second membre soit $< \epsilon/2$. Ce δ étant choisi, le second terme est $< \epsilon/2$ pour n assez grand.

On a donc $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pour n assez grand. Comme c'est vrai pour tout ϵ, on a montré que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, on conclut que la suite de polynômes trigonométriques f_n converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction f.