UNIVERSITÉ PARIS 6 **LM260. 2004-2005**

Examen de Mathématiques du 20 Janvier 2005

Durée : 3 heures

Les documents ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants.

Quand on utilisera un théorème du cours, on donnera soigneusement les raisons qui permettent de l'appliquer.

Exercice 1

Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \qquad v_n = \frac{u_n}{1-u_n^3}.$$

1. Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est-elle respectivement :
- absolument convergente,
- convergente mais non absolument convergente ?

Exercice 2

Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par :

$$f_n(x) = nx^\alpha \mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Montrer que la suite f_n converge simplement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Calculer $\sup_{x\geq 0} f_n(x)$. Pour quelles valeurs du paramètre α la suite f_n est-elle uniformément convergente sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

3. Montrer que, quel que soit $\alpha > 0$ et quel que soit $x_0 > 0$, la suite f_n est uniformément convergente sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, périodique de période 2π, telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \pi - |x|.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.

2. Calculer ses coefficients de Fourier :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

3. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbf{R}$. On note $x \mapsto S_f(x)$ la somme de cette série.

4. Il résulte de la version du théorème de Dirichlet énoncée en cours que, *si f est dérivable au point $x \in \mathbf{R}$*, $S_f(x) = f(x)$. Montrer que $S_f(x) = f(x)$ pour *tout* $x \in \mathbf{R}$.

5. Déduire du résultat précédent la somme de la série $\sum_{p=0}^{+\infty} 1/(2p+1)^2$ puis la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$.

Exercice 4

Le but de l'exercice est de calculer le nombre :

$$\gamma := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt.$$

1. Montrer que l'intégrale généralisée $h(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\, dt$ converge pour tout $x > 0$ et qu'on a

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad h(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{x}}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction :

$$x \in [0,+\infty[, \qquad f_n(x) = \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt.$$

Montrer que la fonction f_n est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et qu'on peut dériver sous le signe d'intégration.

3. Pour $x \in [0,+\infty[$, on considère l'intégrale généralisée :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt.$$

- Montrer que cette intégrale converge pour tout $x \in [0,+\infty[$.
- Calculer $f(0)$.
- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Montrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.

5. Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) - f(x) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x}}.$$

6. En intégrant l'équation différentielle précédente par la méthode de variation de la constante, trouver une autre expression pour f. En déduire la valeur de γ.

UNIVERSITÉ PARIS 6 LM260 2004-2005

Corrigé du partiel du 20 Janvier 2005

Exercice 1. — Soit $\alpha > 0$ et pour $n \geq 1$: $u_n = (-1)^n/n^\alpha$, $v_n = u_n/(1-u_n^3)$.
1) Comme $1/n^\alpha$ décroît vers 0, la série alternée $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ converge par théorème.
2) On a $v_n = u_n(1 + u_n^3 + O(u_n^6)) = u_n + w_n$ avec $w_n \sim u_n^4$.
- Comme $|v_n| \sim |u_n| \sim 1/n^\alpha$, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.
- Si $\alpha > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge. Comme $w_n \sim 1/n^{4\alpha}$ (donc $w_n > 0$ pour n assez grand), par comparaison, c'est le cas si et seulement si $\alpha > 1/4$.

Exercice 2. — Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = nx^\alpha e^{-nx}$.
1) Comme $\alpha > 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout n. Si $x > 0$, $f_n(x) > 0$ et $\ln f_n(x) = -nx + \ln n + \alpha \ln x \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On conclut que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la fonction nulle, simplement sur $\mathbf{R}^+$.
2) La fonction f_n est continue sur $\mathbf{R}^+$ et dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$ avec $f_n'(x) = (\alpha/n - x)n^2x^{\alpha-1}e^{-nx}$. On note $x_n := \alpha/n > 0$. Du signe de f_n', il résulte que f_n croît de $f_n(0) = 0$ à $f_n(x_n)$ quand x croît de 0 à x_n, puis décroît de $f_n(x_n)$ à $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. On en déduit :

$$M_n := \sup_{x\geq 0} f_n(x) = f_n(x_n) = n^{1-\alpha}(\alpha/e)^\alpha.$$

Comme f_n est positive, $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = M_n$. Par définition, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ uniformément sur $\mathbf{R}^+$ si et seulement si $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, si et seulement si $\alpha > 1$.
3) Soit $x_0 > 0$. Comme $x_n = \alpha/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un entier n_0 (qui dépend de x_0) tel que $n \geq n_0 \Rightarrow 0 < x_n < x_0$. Compte tenu des variations de f_n, pour tout $n \geq n_0$, f_n est (positive) décroissante sur $[x_0, +\infty[$ et :

$$\sup_{x\geq x_0} |f_n(x)| = f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc la suite $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ uniformément sur $[x_0, +\infty[$.

Exercice 3. — Soit f la fonction sur $\mathbf{R}$, 2π-périodique telle que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \pi - |x|.$$

1) La fonction f est déterminée par ces propriétés. Elle est continue sur $[-\pi, \pi[$, dérivable sur $[-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, de dérivée $f'(x) = \pm 1$ selon le signe de x. On remarque que $f(x) \xrightarrow[x\to\pi^-]{} 0 = f(-\pi) = f(\pi)$: f est continue à gauche en π.

On en déduit que f est continue (car continue à gauche et à droite) au point $-\pi$, donc en tout point de $[-\pi, \pi[$, donc sur $\mathbf{R}$ par périodicité.

On voit de même que f est dérivable en tout point de $[-\pi, \pi[$ sauf peur-être en 0 et en $-\pi$. On vérifie qu'en ces deux points f a des dérivées à droite et à gauche différentes. On conclut f est dérivable sauf aux points $x \in \mathbf{Z}\pi$.
2) Compte-tenu de la parité de f, on a :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (\pi - |t|)e^{-int}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\cos nt\,dt.$$

On a donc $c_0 = \pi/2$ et si $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{\pi n}\left[(\pi - t)\sin nt\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \sin nt\,dt = \frac{1}{\pi n^2}[\cos nt]_\pi^0 = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}.$$

Donc $c_0 = \pi/2$ et, si $n \neq 0$, $c_n = 0$ si n est pair et $c_n = 2/\pi n^2$ si n est impair.
3) Puisque $|c_n| \leq 2/\pi n^2$, le terme général d'une série convergente, la série de Fourier $S_f(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ de f converge normalement, donc uniformément sur $\mathbf{R}$.
4) Comme la convergence est uniforme, S_f est continue. D'après le théorème de Dirichlet, $S_f(x) = f(x)$ pour tout $x \notin \mathbf{Z}\pi$. Si $x \in \mathbf{Z}\pi$, on a $S_f(y) = f(y)$ pour tout $y \neq x$

assez voisin de x ; comme f et S_f sont continues, on obtient $S_f(x) = f(x)$ en faisant tendre y vers x. En conclusion, f est la somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}.$$

4) En faisant $x = 0$, on obtient $\sum_{p=0}^{+\infty} 1/(2p+1)^2 = \pi^2/8$. D'autre part, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \sum_{p=1}^{+\infty} 1/(2p)^2 + \sum_{p=0}^{+\infty} 1/(2p+1)^2 = (1/4)\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 + \sum_{p=0}^{+\infty} 1/(2p+1)^2.$$

On en déduit : $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = (4/3)\sum_{p=0}^{+\infty} 1/(2p+1)^2 = (4/3)(\pi^2/8) = \pi^2/6$.

Exercice 4. — Pour $x > 0$, on note $h(x) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}$; on note $\gamma := h(1)$.

1) Soit $x > 0$. On a $t \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \mathrm{e}^{-xt^2} \leq \mathrm{e}^{-xt}$ et la convergence de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,dt$ se vérifie par le calcul. Par comparaison, on obtient que l'intégrale généralisée $h(x)$ est (absolument) convergente. Si $x > 0$ et $T > 0$, le changement de variable $t = u/\sqrt{x}$ donne

$$\int_0^T \mathrm{e}^{-xt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}T} \mathrm{e}^{-u^2}\,du \xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du.$$

On a donc $h(x) = h(1)/\sqrt{x} = \gamma/\sqrt{x}$.

2) Soit $f_n(x) = \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$. La fonction $(x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times [0,n]$. Par théorème, il en résulte que f_n est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et qu'on peut dériver sous le signe d'intégration. En particulier

$$f_n'(x) = -\int_0^n t^2\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt = f_n(x) - \int_0^n \mathrm{e}^{-xt^2}\,dt.$$

3) Pour $x \geq 0$, on considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$.

a) Comme $0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$, l'intégrale généralisée $f(x)$ converge pour tout $x \geq 0$.

b) On a

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

c) On a $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,dt = \gamma/\sqrt{x}$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

4) Pour tout $x \geq 0$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2},$$

reste d'une intégrale convergente indépendante de x, donc la suite $\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 : f_n converge uniformément vers f quand $n \to +\infty$.

5) Par comparaison, l'intégrale généralisée $g(x) = -\int_0^{+\infty} t^2\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$ converge absolument pour tout $x > 0$; en effet : $0 \leq t^2\mathrm{e}^{-xt^2}/(1+t^2) \leq \mathrm{e}^{-xt^2}$.

Si $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$, on a $t^2\mathrm{e}^{-xt^2}/(1+t^2) \leq \mathrm{e}^{-at^2}$, d'où $|f_n'(x) - g(x)| \leq \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,dt$, reste d'une intégrale convergente indépendante de x. Donc $f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ uniformément sur $[a, +\infty[$. Par théorème, on en déduit que f est dérivable sur $[a, +\infty[$ de dérivée g. Quand $n \to +\infty$, on déduit de $f_n'(x) = f_n(x) - \int_0^n \mathrm{e}^{-xt^2}\,dt$ que $f'(x) - f(x) = -h(x)$ pour tout $x > 0$.

6) La fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$, de dérivée $-\gamma\mathrm{e}^{-x}/\sqrt{x}$. On a donc :

$$0 < \epsilon < x, \qquad \left[f(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_\epsilon^x = -\gamma\int_\epsilon^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = -2\gamma\int_{\sqrt{\epsilon}}^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\,du$$

(on a fait le changement de variable $t = u^2$ dans l'intégrale.) Quand ϵ tend vers 0, on obtient

$$f(x)\mathrm{e}^{-x} = \frac{\pi}{2} - 2\gamma\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\,du.$$

Quand x tend vers $+\infty$, on obtient $0 = \frac{\pi}{2} - 2\gamma^2$ puis $\gamma = \sqrt{\pi}/2$.

Université Pierre et Marie Curie | **2004-2005**
LM 260 | 2ème semestre
Examen du 10 juin 2005 | Durée 3 heures

Exercice 1

Étudier la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Exercice 2

Considérons la série entière réelle

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{\sqrt{k}}.$$

1. Calculer son rayon de convergence R.

2. Etudier le comportement de la série pour $|x| = R$.

Problème 3

1. Soit $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donner la définition de la convergence simple et de la convergence uniforme pour la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Soit $p \in \mathbb{R}$. Considérons la série de fonctions sur $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)}.$$

a) Montrer que si $p \leq 0$ la série ne converge que pour $x = 0$.

b) Montrer que si $p > 0$ la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) On considère pour $n \in N^*$ fixé, la fonction $g_n(x) = \frac{x}{n^p(1+nx^2)}$. Etudier g_n et tracer son graphe.

d) En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs de p pour lesquelles la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Problème 4

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R tel que $R > 0$. On note f sa somme sur l'intervalle $]-R, +R[$.

1. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients a_n pour que f satisfasse l'équation différentielle

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

2. On suppose ces conditions satisfaites. Donner les expressions des a_n en fonction de a_0 et déterminer la valeur de R.

3. Parmi les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trouvées en **2,** soit F celle qui tend vers 1 si $x \to 0$. Montrer que

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos t) dt.$$

Indication : On pourra utiliser le développement en série entière de $\cos z$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

ainsi que la formule suivante:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n}\, dt = \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Problème 5

Soit f la fonction périodique de période 2π telle que f est paire et

$$f(x) = x(\pi - x), \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

1. Calculer la série de Fourier de cette fonction.

2. Montrer que cette série de Fourier converge uniformément vers f(x).

3. En déduire la valeur de la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

UNIVERSITÉ PARIS 6 **2004-2005**

LM260 : Examen du 9 Septembre 2005

Durée : 3 heures

Les documents ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x > 0$, on pose :

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n} \ .$$

1) Montrer que $f_n(x)$ est défini pour tout $x > 0$.

2) Montrer qu'il existe un nombre réel a_n tel qu'on ait :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f_n(x) = a_n x^{1-2n}.$$

Déterminer a_1.

3) Montrer soigneusement que la fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle $f_n'(x) = -2nxf_{n+1}(x)$.
En déduire la valeur de a_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 2

1) Soit $u_n : I \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions. Rappeler la définition de la propriété : *la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge normalement sur* I.

2) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, de terme général la fonction

$$u_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2},$$

converge simplement sur $\mathbf{R}$. On note f sa somme.

3) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\sup_{x \in \mathbf{R}} |u_n(x)|$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle normalement convergente sur $\mathbf{R}$?

4) Montrer que, pour tout $X > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur le segment $[-X, X]$.
En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

5) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$, vérifier l'inégalité :

$$\int_{n/x}^{(n+1)/x} \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{(n-1)/x}^{n/x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

En déduire que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Comparer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} u_n(x) \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right).$$

Exercice 3

À tout $a \in \mathbf{R}$, on associe la fonction f_a sur $\mathbf{R}$, qui est périodique de période 2π et telle que :

$$f_a(x) = \cosh ax := \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \quad \text{si} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f_a :

$$n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_a(x) e^{-inx}\, dx.$$

2) On admettra la version suivante du théorème de Dirichlet : *Soit f une fonction sur $\mathbf{R}$, périodique de période 2π et localement intégrable. Si f est continue au point $x_0 \in \mathbf{R}$ et admet en ce point une dérivée à gauche et une dérivée à droite, $f(x_0)$ est la somme de la série de Fourier centrée de f au point x_0.*

Quelle formule obtient-on en appliquant ce résultat à la fonction f_a. Écrire la formule obtenue pour $x = \pi$.

3) Déduire du résultat précédent la formule suivante :

$$(1) \qquad x \in \mathbf{R}^*, \qquad \pi \frac{\cosh \pi x}{\sinh \pi x} = \frac{1}{x} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

Exercice 4

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Log}\,(1 + x^2/n^2)$ converge sur $\mathbf{R}$, normalement sur $[-X, X]$ pour tout $X > 0$. On note $S(x)$ sa somme.

2) Montrer que $S \in C^1(\mathbf{R})$ et exprimer S' comme la somme d'une série de fonctions.

3) Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, on note aussi $\prod_{k=1}^{n} a_k$ le produit $a_1 \ldots a_n$. Déduire du résultat de question précédente que la suite $p_n(x)$, définie par :

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right).$$

converge pour tout $x \in \mathbf{R}$ et que sa limite $p(x)$ est non nulle. On définit ainsi une fonction p sur R.

4) Montrer que la fonction p est dérivable et que, pour tout x :

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

5) En déduire, en admettant la formule (1) de l'Exercice 3, la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \qquad \frac{\sinh \pi x}{\pi x} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right).$$