UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE L 2- MATHS 256

EXAMEN DU LUNDI 17 JANVIER 2005-- *Durée: 2 heures*

Documents, calculatrices et portables interdits

Les deux problèmes sont indépendants

PROBLÈME 1. (*sur 12 pts*)

1. Pour n entier ≥ 0, on pose $\lambda_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ (avec la convention $0! = 1$)

1.a) Démontrer que la suite (λ_n) est strictement décroissante.

1.b) En utilisant l'équivalent $m! \underset{\infty}{\sim} m^m e^{-m} \sqrt{2m\pi}$, démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \lambda_n$ est semi-convergente.

2. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \lambda_n x^n$ et étudier la convergence aux bords de l'intervalle de convergence $]-R,+R[$.

3. On considère l'équation différentielle: (E) $2(1+x)y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$.

On suppose qu'il existe une solution y développable en série entière au voisinage de 0, soit $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

3.a) Calculer les coefficients a_0, a_1 et a_2.

3.b) Donner une relation de récurrence entre deux coefficients consécutifs a_{n+1} et a_n.

3.c) En déduire le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et calculer explicitement a_n.

3.d) Exprimer y sous forme de fonction élémentaire.

3.e) En déduire la somme de la série numérique du 1.b).

PROBLÈME 2. (*sur 8 pts*)

1. Déterminer les x réels pour lesquels les intégrales suivantes convergent:

a) $\displaystyle\int_0^1 t^{xt}\,dt$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{(x-2)t}\,dt$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{t^x+1}{t^2+1}\right)^t dt$

2.a) Pour t fixé >1, étudier la monotonie sur $\mathbf{R}$ de la fonction $x \to (1+t^x)^t$.

2.b) Démontrer que la fonction F_2 définie par $F_2(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{t^x+1}{t^2+1}\right)^t dt$ est continue sur $D =]-\infty, 2[$.

2.c) Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{t^x+1}{t^2+1}\right)^t dt$ est continue sur $D =]-\infty, 2[$.

EXAMEN DU VENDREDI 9 SEPTEMBRE 2005-- ***Durée: 2 heures***

Documents, calculatrices et portables interdits

Les deux problèmes sont indépendants

PROBLÈME I

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière: $\sum_{p\geq 0}(-1)^p \dfrac{2^{p+1}}{(2p+1)!}x^{2p+1}$, x réel.

2. On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 2y = 0$ avec $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

On suppose qu'il existe une solution développable en série entière au voisinage de 0

$y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

2.a. Calculer les coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3.

2.b. Calculer les coefficients $a_n, n > 3$, selon la parité de n.

2.c. Calculer la somme de la série entière sous forme de fonction élémentaire.

3. a . Démontrer que la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2\sin x\cos x$ est développable

en série de Fourier.

3.b. Calculer les coefficients de Fourier de *f*. On rappelle que :

$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx dx$ et $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx dx$.

PROBLÈME II

1. a. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1}{t+x}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}dt$ est convergente pour tout $x>0$.

1.b.Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1}{t+x}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}dt$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$

1.c.Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1}{t+x}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}dt$ converge normalement sur tout $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

2. Pour $x>0$, on pose $F(x)= \int_0^1 \dfrac{1}{t+x}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}dt$

2.a. Demontrer que F est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.

2.b. Calculer $F(x)$ sous forme de fonctions élémentaires.(On pourra poser $u = \dfrac{1-t}{t}$).