Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 Année 2006-2007
LM 250 : Suites, séries et intégrales

Examen du 16 Janvier 2007.

Durée : 2 heures.

Les documents, calculatrices et portables ne sont pas autorisés.

Les exercices I et II sont indépendants.

NB : La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction. En particulier, il est demandé d'énoncer clairement les théorèmes utilisés.

I

On rappelle le développement en série entière au voisinage de 0 suivant, où x désigne un réel,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cdot \tag{1}$$

1. (a) Quelles sont toutes les valeurs du réel x pour lesquelles l'égalité (1) est vraie ?
   (b) Démontrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$ est convergente et calculer sa somme.
   (c) Démontrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)2^n}$ est convergente.
   (d) Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$ et préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$.
   (e) Calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$ sous forme de fonctions élémentaires. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)2^n} \cdot$
2. On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : \ \ x(1-x)y' + y = x \cdot$$

   On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0, soit $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
   (a) Calculer les coefficients a_0, a_1 et a_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre deux coefficients successifs a_n et a_{n+1}.
   (c) En déduire a_n pour tout entier n. Calculer le rayon de convergence de la série entière obtenue.
   (d) Exprimer y sous forme de fonctions élémentaires.

II

1. (a) Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}$$

est convergente et calculer sa valeur.

(b) Déterminer tous les réels x pour lesquels l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x + 1}$$

est convergente.

(c) Déterminer tous les réels x pour lesquels l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t \; dt}{t^x}$$

est convergente.

2. On se propose de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t \, dt}{t^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

(a) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$\frac{1}{x^4 + 1}$$

on pourra remarquer que, pour tout réel x, on a :

$$x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)\cdot$$

(b) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\cdot$$

(c) Montrer que

$$J = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t^2 + 1)}$$

et en déduire la valeur de J.