Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 Année 2005-2006
LM 250 : Suites, séries et intégrales

Examen du 24 Janvier 2006.
Durée : 2 heures.
Les documents, calculatrices et portables ne sont pas autorisés.
Les exercices I et II sont indépendants.

Soigner la rédaction et justifier toutes les réponses.

I

On considère les intégrales

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^p}\, dt \text{ et } J_p = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^p}\, dt \ .$$

1. Déterminer toutes les valeurs de l'entier p pour lesquelles l'intégrale I_p est convergente. Même question pour J_p.
2. Démontrer que
$$\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\, dt \ .$$
En déduire la valeur de I_2.
3. On se propose d'étudier la nature de la série de terme général I_p.
   (a) En calculant $J_p - J_{p-1}$ par parties, établir la relation de récurrence
   $$J_p = \frac{2p-3}{2p-2}\, J_{p-1} \text{ pour tout entier } p \geq 2.$$
   (b) En déduire que
   $$J_p = \frac{(2p-2)!}{[2^{p-1}(p-1)!)]^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ pour tout entier } p \geq 1.$$
   (c) On considère la n-ème somme partielle de la série de terme général I_p, $S_n = \sum_{p=2}^{n} I_p$. Démontrer que $S_n = J_1 - J_n$.
   (d) En utilisant l'approximation de Stirling :
   $$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty,$$
   démontrer que la série de terme général I_p est convergente et calculer la somme de cette série.

II

1. On considère la série entière
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n\,2^n}\,.$$
   (a) Calculer son rayon de convergence R.
   (b) Etudier la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$.
   (c) On note $S(x)$ la somme de la série quand celle-ci est définie. Donner l'expression de la dérivée $S'(x)$ puis celle de $S(x)$ sous forme de fonctions élémentaires.

2. On considère l'équation différentielle :
$$(E)\ :\ (2-x^2)y'' - 2xy' = 1.$$
   On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière au voisinage de 0, $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, vérifiant de plus les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
   (a) Calculer les coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3.
   (b) Calculer les coefficients a_n pour tout entier $n \geq 4$, selon la parité de n.
   (c) Déduire de la question 1. (c) l'expression de y sous forme de fonctions élémentaires.