Université Pierre et Marie Curie — Année 2004-2005
LM 250

Examen du 9 Septembre 2005.

Durée : 2 heures.

Les documents, calculatrices et portables ne sont pas autorisés.

Les exercices I, II et III sont indépendants. Le barème est indicatif.

Soigner la rédaction et justifier toutes les réponses.

I (15 points)

On considère la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

1. Calculer $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   Le critère de d'Alembert permet-il de déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$?

2. On pose
   $$b_n = \ln(a_n) - \ln(a_{n+1}), \text{ pour tout } n \geq 0.$$
   (a) Montrer que la série de terme général b_n est une série à termes positifs divergente.
   (b) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$, où $S_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$.
   (c) Déduire de (b) que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3. Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$?

4. On pose $c_n = n a_n$, pour tout $n \geq 0$.
   (a) Montrer que $n a_n \geq a_1$, pour tout $n \geq 1$ (étudier le rapport $\frac{c_n}{c_{n+1}}$).
   (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

5. Etudier directement la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ en utilisant l'approximation de Stirling :
   $$\text{quand } n \text{ tend vers } +\infty,\ n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

6. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$.

II (10 points)

On rappelle les coefficients de Fourier et la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique f :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,$$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

On considère la fonction f périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-2\pi, +3\pi]$. Donner la parité de f, les points de discontinuité et les points où f n'est pas dérivable.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Montrer que la série de Fourier de f converge en tout $x \in \mathbb{R}$ et donner sa somme en tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, calculer la somme de la série de Fourier pour $x = 0,\ 1,\ \pi$.

III (bonus)

Soit α un réel > 0. Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} te^{-\alpha t}\,dt$$

est convergente et calculer sa valeur.

Université Pierre et Marie Curie — Année 2004-2005
LM 250

Corrigé de l'examen du 9 Septembre 2005.

I (15 points)

1. On a
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$$
donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ le critère de d'Alembert ne permet pas de déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

2. On pose $b_n = \ln(a_n) - \ln(a_{n+1})$, pour tout $n \geq 0$.

   (a) Comme la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que la fonction ln est croissante, la série de terme général b_n est une série à termes positifs. De plus
   $$b_n = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln \frac{2n+3}{2n+2} = \ln\left(1 + \frac{1}{2n+2}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}$$
   donc la série est de même nature que la série harmonique, i.e. divergente.

   (b) La série de terme général b_n étant une série à termes positifs divergente, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

   (c) On a, sachant que $a_0 = 1$,
   $$S_n = \ln(a_0) - \ln(a_1) + \ln(a_1) - \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) - \ln(a_{n+1}) = -\ln(a_{n+1}).$$
   Comme $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \ln(a_n) = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, donc la série de terme général $(-1)^n a_n$ est une série alternée convergente.

4. On pose $c_n = n a_n$, pour tout $n \geq 0$.

   (a) On a
   $$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} = \frac{4n^3 + 10n^2 + 6n}{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4} < 1$$
   donc la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Par suite $c_n > c_1 = a_1$, soit $n a_n > a_1$ pour tout entier $n \geq 1$.

(b) On a donc $a_n > \frac{a_1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$. Le critère de comparaison avec la série harmonique nous permet de conclure que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente.

5. On peut étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ en utilisant l'approximation de Stirling. On a en effet

$$a_n \sim_{n\to+\infty} 4^n \frac{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}.$$

Comme

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{(2n+1)\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)} \to_{n\to+\infty} e^{-1}$$

on a $a_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente par comparaison avec la série de Riemann $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

6. Le rayon R de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} d_n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$ est tel que $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n}$. Comme $d_n = \frac{a_n}{4^n}$ et que, par la question 1, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, on a $\frac{1}{R} = \frac{1}{4}$, soit $R = 4$.

II (10 points)

1. La fonction f est paire, on a $f(x) = x$ sur $[0,1]$ et $f(x) = 0$ sur $]1,\pi]$. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ sauf aux points $x_k = 2k\pi - 1$ et $x'_k = 2k\pi + 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf aux points $x_k = 2k\pi - 1$, $x'_k = 2k\pi + 1$ et $x''_k = 2\pi k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

2. Comme la fonction f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x dx = \frac{1}{\pi}$ et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(n)}{n} + \frac{\cos(n)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

3. Comme la fonction f est 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet dit que la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$. Sa somme est égale à $f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f est continue et est égale à $\frac{1+0}{2}$ aux points de discontinuité $x_k = 2k\pi - 1$ et $x'_k = 2k\pi + 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, $S_f(0) = f(0) = 0$, $S_f(1) = \frac{f(1^-)+f(1^+)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ et $S_f(\pi) = f(\pi) = 0$.

III (bonus)

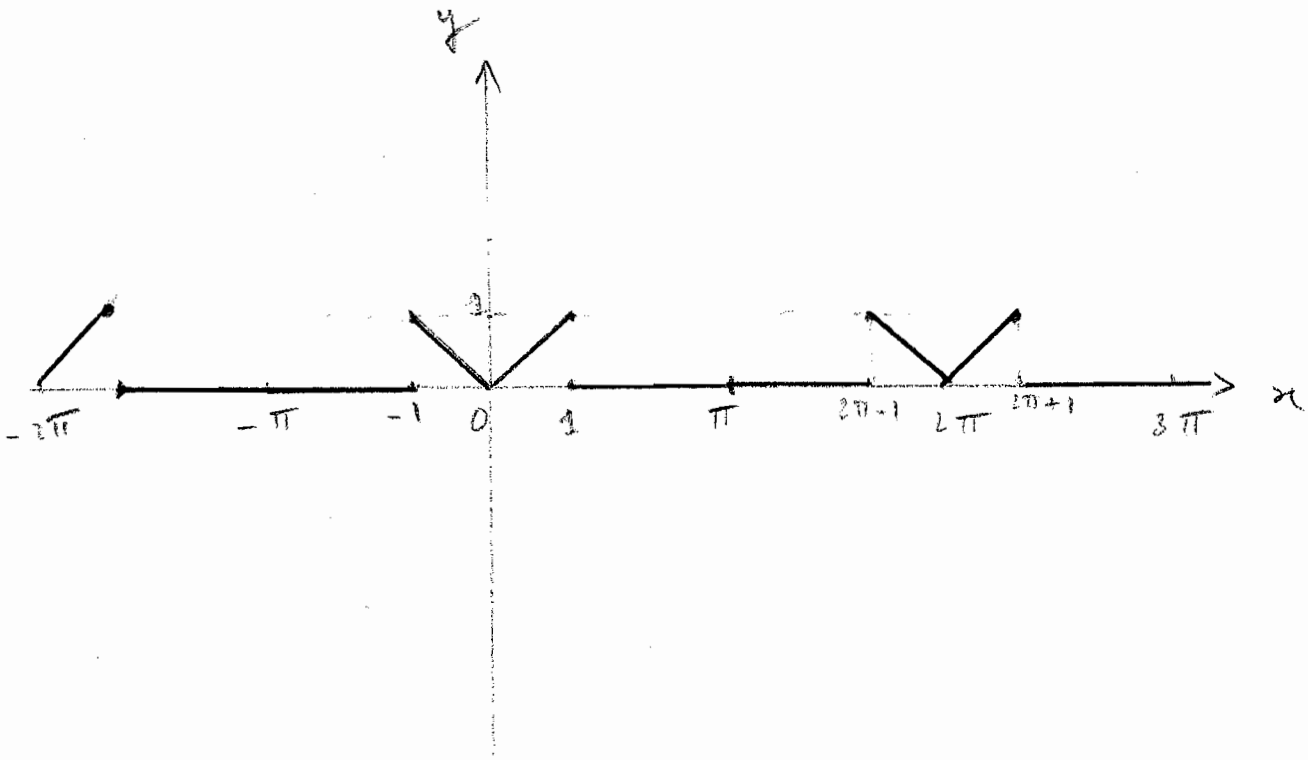
Soit α un réel > 0. Posons $f(x) = xe^{-\alpha x}$ pour $x \in [0, +\infty[$. La fonction f est positive et définie en $x = 0$, donc l'intégrale $\int_0^a f(t)dt$ est une intégrale définie pour tout $a > 0$. Par croissance comparée de l'exponentielle et de la fonction puissance et puisque $\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} = 0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-\alpha t} = 0.$$

Par suite pour $t \geq A$, $A > 0$ assez grand, on a $t^3 e^{-\alpha t} < 1$ soit $f(t) < \frac{1}{t^2}$. Puisque l'intégrale généralisée $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente, il en est de même de $\int_A^{+\infty} f(t)\, dt$. L'intégrale I est donc convergente. On peut aussi montrer cette propriété en calculant la valeur de I : $I = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X te^{-\alpha t}\, dt$. On fait une intégration par parties :

$$\int_0^X te^{-\alpha t}\, dt = -\frac{1}{\alpha}[te^{-\alpha t}]_0^X + \frac{1}{\alpha}\int_0^X e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha} Xe^{-\alpha X} - \frac{1}{\alpha^2}(e^{-\alpha X} - 1)$$

Comme $\lim_{X\to+\infty} e^{-\alpha X} = 0 = \lim_{X\to+\infty} Xe^{-\alpha X}$, on a, on a $I = \frac{1}{\alpha^2}$.



Université Pierre et Marie Curie — Année 2004-2005
LM 250

Examen du 20 Janvier 2005.

Durée : 2 heures.

Les documents, calculatrices et portables ne sont pas autorisés.

Le barème sur 25 points est indicatif.

Soigner la rédaction et justifier toutes les réponses.

I (10 points)

(les 3 exercices suivants sont indépendants les uns des autres)

1. Nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{-n^2}$.

2. Nature de la série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Soit $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$. Décomposer en éléments simples, puis développer la fonction f en série entière au voisinage de 0.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

II (15 points)

Soit $n \geq 0$ un entier.

1. Démontrer que les intégrales suivantes sont convergentes

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\, dx\,,\ J_n = \int_0^1 x^n \ln x\, dx\,.$$

   Calculer J_n pour tout entier $n \geq 0$.

2. (a) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ pour $x \neq 1$ et tout entier $n \geq 0$.

   (b) En déduire que

$$I = -(J_0 + J_1 + \cdots + J_n) + H_n \text{ où } H_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} \ln x}{x-1}\, dx\,.$$

3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$ pour $x \in]0,1[$.

   (a) Calculer $\lim_{x\to 0+} g(x)$ et $\lim_{x\to 1-} g(x)$.

   (b) Montrer que la fonction g est bornée. Soit $M = \sup_{x\in]0,1[} |g(x)|$.

4. Montrer que $|H_n| \leq \frac{M}{n+1}$ puis que $I = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Université Pierre et Marie Curie — Année 2004-2005
LM 250

Correction de l'examen du 20 Janvier 2005.

I

1. C'est une série à termes positifs. On applique le critère de Cauchy

$$(u_n)^{1/n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right)}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $(u_n)^{1/n}$ tend vers $e^{-2} < 1$ donc la série CV.

2. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est une série alternée CV et la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann DV. La série de terme général v_n est donc DV (CV+DV=DV).

3. On a

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{1/2}{1-x/2} - \frac{2/3}{1-x/3}$$

soit

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^n} - \frac{2}{3}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{3^n}$$

$f(x)$ est somme de deux séries entières de rayons distincts $R_1 = 2$ et $R_2 = 3$. Donc le DSE(0) de f est $f(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$ ayant pour rayon $R = 2$.

II

1. Pour I il n'y a un problème en 0 et en 1. Soit a t.q. $0 < a < 1$. La fonction $\frac{\ln x}{x-1}$ est positive et équivalente à $-\ln x$ au voisinage de 0. Une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$ qui a une limite quand $x \to 0^+$ donc $\int_0^a \ln x dx$ CV et donc $\int_0^a \frac{\ln x}{x-1}dx$ CV aussi ($\int_0^a \ln x dx$ est aussi une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 0 < 1$, donc CV). Au voisinage de 1, posons $u = 1 - x$. Alors $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1-u)}{-u}$ tend vers 1 quand $u \to 0^+$, donc $\int_a^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$ CV.
Pour J_n il n'y a un problème qu'en 0. Pour montrer l'existence et calculer J_n, on fait une intégration par parties. Soit X tel que $0 < X < 1$.

$$\int_X^1 x^n \ln x\, dx = \int_X^1 \ln x\, d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \left[\ln x \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_X^1 - \int_X^1 \frac{x^n}{n+1}dx.$$

Donc

$$J_n = \lim_{X\to 0^+}\left[\ln x\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_X^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. (a) Si $x \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = -\frac{1}{x-1} + \frac{x^{n+1}}{x-1}$. Soit

$$\frac{\ln x}{x-1} = -\sum_{k=0}^n x^k \ln x + \frac{x^{n+1}\ln x}{x-1}.$$

(b) En intégrant l'égalité précédente entre 0 et 1 et en utilisant la valeur de J_k, on obtient (H_n est CV car égale à une somme d'intégrales CV)

$$I = -(J_0 + J_1 + \cdots + J_n) + H_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + H_n.$$

3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x\ln x}{x-1}$ pour $x \in]0,1[$.

(a) On a $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ (par croissance comparée du logarithme et de la fonction puissance) et $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{u\to 0^+}\frac{\ln(1-u)}{-u} = 1$.

(b) La fonction g est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1 donc elle est bornée. Soit $M = \sup_{x\in]0,1[}|g(x)|$.
On a aussi $g'(x) = \frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2} = \frac{h(x)}{(x-1)^2}$ du signe de h. Comme $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0$ sur l'intervalle $]0,1[$ et $h(1) = 0$, on a $g' > 0$ sur $]0,1[$, donc $M = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 1$.

4. La fonction $\frac{x^{n+1}\ln x}{x-1}$ est positive sur $]0,1[$ et a une valeur finie en 0 et en 1. On a

$$0 \leq H_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}\ln x}{x-1}dx = \int_0^1 x^n g(x)\,dx \leq M\int_0^1 x^n\,dx = \frac{M}{n+1}$$

et par suite $\lim_{n\to+\infty} H_n = 0$. On a vu que

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} = I - H_n$$

donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n = I$.