Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 Année 2006-2007
LM 250 : Suites, séries et intégrales

Corrigé de l'examen du 16 Janvier 2007.

I

1. (a) La fonction $\ln(1-x)$ est définie seulement si $1-x>0$, soit $x<1$. Le rayon de CV de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ est $=1$. La formule est donc vraie sur $I :=]-1,+1[$. On peut montrer que la formule est vraie aussi pour $x=-1$ (en -1 la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente).

   (b) $x=\frac{1}{2}\in I$ donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^n}$ CV. Sa somme est obtenue en faisant $x=\frac{1}{2}$ dans la formule (**??**) et on obtient $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n2^n}=|n2$.

   (c) On a $0<\frac{1}{n(n+1)2^n}<\frac{1}{n2^n}$ pour tout $n\geq 1$. Donc en utilisant la question précédente et le critère de comparaison la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)2^n}$ CV.

   (d) Soit $b_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=1$, donc le rayon de CV est $=1$. Si $x=\pm 1$, on a $\left|\frac{x^n}{n(n+1)}\right|=\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$ quand $n\to+\infty$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ CV donc la série CV absolument en $x=\pm 1$ par le critère d'équivalence.

   (e) $\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{x^n}{n}-\frac{x^n}{n+1}$. La somme vaut 0 si $x=0$ et si $x\in]-1,+1[\setminus\{0\}$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n}$$

   soit

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+1)}=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}(-\ln(1-x)-x)=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1$$

   Par suite $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)2^n}=1-\ln 2$.

2. (a) En faisant $x=0$ dans (E), on obtient $a_0=y(x)=0$. On suppose que $y=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ est solution de (E), la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ ayant un rayon de CV $R\neq 0$. Alors

$$a_0-x+\sum_{n\geq 1}na_nx^n-\sum_{n\geq 1}na_nx^{n+1}+\sum_{n\geq 1}a_nx^n=0$$

   soit

$$a_0+(-1+a_1+a_1)x+\sum_{n\geq 2}(na_n-(n-1)a_{n-1}+a_n)x^n=0$$

Par unicité du DSE(0), on a $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $3a_2 = a_1$, soit $a_2 = \frac{1}{2\times 3}$ et plus généralement $(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

(b) La relation de récurrence est $a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

(c) On obtient pour tout $n \geq 2$, et c'est valable aussi pour $n = 1$,

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)\dots 1}{(n+1)n(n-1)\dots 3}a_1 = \frac{1}{(n+1)n}$$

soit $y(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, le rayon de CV est $= 1$. Il est bien $\neq 0$.

(d) D'après la question 1-(e), on a $y(x) = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1$ si $x \in I$ et $y(0) = 0$. On remarque que la somme est bien continue en $x = 0$ puisque (on utilise que $\ln(1-x) \sim -x$ si x tend vers 0)

$$\lim_{x\to 0,\, x\neq 0} y(x) = \lim_{x\to 0}(-x\frac{1-x}{x} + 1) = -1 + 1 = 0 = y(0)$$

II

1. (a) La fonction $f(t) = \frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$, il n'y a donc un problème qu'en $+\infty$. En $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est CV. Par comparaison l'intégrale donnée CV. On a

$$t^2 + t\sqrt{2} + 1 = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\left[\sqrt{2}\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2 + 1\right)$$

donc, en posant $u = \sqrt{2}(t + \frac{\sqrt{2}}{2})$, d'où $du = \sqrt{2}\,dt$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \sqrt{2}|\arctan u|_1^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

En faisant le changement de variable $u = -t$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} = -\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

(b) La fonction$g(t) = \frac{1}{t^x+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$, il n'y a donc un problème qu'en $+\infty$. Au voisinage de $+\infty$, $g(t) \sim 1$ si $x < 0$ et $g(t) = \frac{1}{2}$ si $x = 0$, l'intégrale diverge. Si $x > 0$, $g(t) \sim \frac{1}{t^x}$ au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ est CV si et seulement si $x > 1$. Par comparaison, $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ CV si et seulement si $x > 1$. En conclusion, l'intégrale donnée CV si et seulement si $x > 1$.

(c) La fonction $F(t) = \frac{\arctan t}{t^x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. En $t = 0$, la fonction est équivalente à $\frac{t}{t^x} = \frac{1}{t^{x-1}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{x-1}} dt$ CV si et seulement si $x - 1 < 1$, soit $x < 2$. En $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{\pi}{2t^x}$ et l'intégrale CV si et seulement si $x > 1$. En conclusion, l'intégrale donnée CV si et seulement si $1 < x < 2$.

2. $x = \frac{3}{2} > 1$ donc J CV.

(a) On a

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} = \frac{ax+b}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)} + \frac{cx+d}{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)}$$

La fonction est paire et, par unicité de la décomposition en éléments simples, on a (en faisant $x \mapsto -x$) $a = -c$ et $b = d$. Pour $x = 0$, on obtient $1 = b + d$, soit $b = d = \frac{1}{2}$. Pour $x = 1$, on obtient $a = \frac{\sqrt{2}}{4} = -c$.

(b) On a

$$\int \frac{(at+b)dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} = \frac{a}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(2t + \sqrt{2})\,dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} + \left(b - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}$$

On a $b - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}$. De même

$$\int \frac{(-at+b)dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} = -\frac{a}{2} \int \frac{(2t - \sqrt{2})\,dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \left(b + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1}$$

On a $b + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \frac{a}{2} \left| \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \right|_0^{+\infty} + \frac{1}{4} \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4} \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cdot$$

(c) On fait une intégration pour calculer J. On pose $u = \arctan t$, $dv = \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ soit $du = \frac{dt}{1+t^2}$ et $v = -2\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$. Donc

$$J = \left| \frac{\arctan t}{t^{\frac{1}{2}}} \right|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t^2)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t^2)}$$

On pose $w = \sqrt{t}$, soit $dw = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, donc

$$J = 4 \int_0^{+\infty} \frac{dw}{1+w^4} = \pi\sqrt{2} \cdot$$