Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 Année 2005-2006
LM 250 : Suites, séries et intégrales

Corrigé succint de l'examen du 24 Janvier 2006 (et remarques).

I

1. La fonction $f(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^p}$ est positive, définie et continue sur $[0, +\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle (il n'y a pas de problème à la borne 0). En $+\infty$, on a $f(t) \sim \frac{t^2}{t^{2p}} = \frac{1}{t^{2p-2}}$ (et non pas $\frac{1}{t^p}$...). L'intégrale I_p est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2p-2}}$, donc converge si et seulement si $2p-2 > 1$, soit $p > \frac{3}{2}$ ou $p \geq 2$ puisque p est un entier. La fonction $g(t) = \frac{1}{(1+t^2)^p}$ est positive, définie et continue sur $[0, +\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle (il n'y a pas de problème à la borne 0). En $+\infty$, on a $g(t) \sim \frac{1}{t^{2p}}$. L'intégrale J_p est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2p}}$, donc converge si et seulement si $2p > 1$, soit $p > \frac{1}{2}$ ou $p \geq 1$ puisque p est un entier.

2. On fait un changement de variable $t = \frac{1}{u}$, soit $dt = -\frac{1}{u^2}$ et on en déduit le résultat. Alors
$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt + \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$
soit
$$\int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
Remarquer que $\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t + K$ (et non pas $\ln(1+t^2) + K$...).

3. (a) Pour tout entier $p \geq 2$ (pour que J_{p-1} soit convergente), on a
$$J_p - J_{p-1} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t^2)^p} - \frac{1}{(1+t^2)^{p-1}} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-(1+t^2)}{(1+t^2)^p}\,dt$$
soit $J_p - J_{p-1} = -I_p$.
Remarquer qu'il est vraiment plus que maladroit (...!) de réduire au même dénominateur de la façon suivante
$$\frac{1}{(1+t^2)^p} - \frac{1}{(1+t^2)^{p-1}} = \frac{(1+t^2)^{p-1} - (1+t^2)^p}{(1+t^2)^p(1+t^2)^{p-1}}.$$
On intègre $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^p}$ par parties en posant $u = \frac{1}{2}t$ et $dv = \frac{2t}{(1+t^2)^p}dt = \frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^p}$, donc $du = \frac{1}{2}$ et $v = \frac{-1}{(p-1)(1+t^2)^{p-1}}$, soit
$$I_p = \left[\frac{\frac{1}{2}t}{(p-1)(1+t^2)^{p-1}} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2(p-1)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{p-1}}dt = \frac{1}{2(p-1)} J_{p-1}.$$
Par suite $J_p - J_{p-1} = -\frac{1}{2(p-1)} J_{p-1}$, d'où $J_p = \frac{2p-3}{2p-2} J_{p-1}$ pour tout $p \geq 2$.

(b) On a

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Par récurrence descendante, on en déduit, pour tout entier $p \geq 2$,

$$J_p = \frac{(2p-3)(2p-5)\dots 3.1}{(2p-2)(2p-4)\dots 4.2} J_1 = \frac{(2p-2)(2p-3)(2p-4)(2p-5)\dots 4.3.2.1}{(2p-2)^2(2p-4)^2\dots 4^2.2^2} \frac{\pi}{2}$$

soit $J_p = \frac{(2p-2)!}{[2^{p-1}(p-1)!]^2} \frac{\pi}{2}$.

(c) Comme $I_p = J_{p-1} - J_p$, la série de terme général I_p est une série télescopique. Sa n-ème somme partielle est donc

$$S_n = \sum_{p=2}^{n} I_p = (J_1 - J_2) + (J_2 - J_3) + \dots + (J_{n-1} - J_n) = J_1 - J_n.$$

(d) La série de terme général I_p converge, si et seulement si la suite (S_n) a une limite finie, donc si et seulement si la suite (J_n) a une limite finie L et alors la somme de la série sera égale à $J_1 - L$. Pour montrer la limite de la suite (J_n) est $L = 0$, on utilise l'approximation de Stirling.

II

1. (a) La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n\, 2^n}$ est une série lacunaire. On pose $u = x^2$ et on calcule le rayon R' de la série $\sum_{n\geq 1} a_n u^n = \sum_{n\geq 1} \frac{u^n}{2n\, 2^n}$:

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n2^n}{2(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

donc la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n\, 2^n}$ converge si $x^2 < 2$ et diverge si $x^2 > 2$. Son rayon est donc $R = \sqrt{2}$.

(b) En $x = \pm 2$, la série a pour terme général $\frac{1}{2n}$ donc diverge puisque elle est de même nature que la série harmonique.

(c) Pour tout $x \in D_R =]-2, +2[$ on peut dériver terme à terme, soit $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2nx^{2n-1}}{2n\, 2^n}$. Donc pour tout $x \neq D_R \setminus \{0\}$

$$S'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{x}{2-x^2}.$$

Remarquer que la somme de la série géométrique, de raison $\frac{x^2}{2}$, $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ ne commence pas à $n = 0$, donc

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Comme $S(0)=0$, on a, en intégrant terme à terme, pour $x \in D_R \setminus \{0\}$
$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{-2x}{2-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{d(2-x^2)}{2-x^2}$$
soit
$$S(x)=-\frac{1}{2}\left[\ln|2-x^2|\right]_0^x=\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2}}.$$

2. On suppose que l'équation différentielle (E) admet une solution développable en série entière autour de $x=0$, $y=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, avec un rayon de CV $R\neq 0$

   (a) Si $y=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on a $y(0)=a_0=0$ et $y'(0)=a_1=0$ et pour $x\in D_R$,
   $y'=\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$ et
   $y''=\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.
   On remplace dans (E)
   $$(2-x^2)\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}-2x\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}-1=0$$
   soit
   $$\sum_{n\geq 0} 2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n-\sum_{n\geq 1} 2na_n x^n-1=0$$
   et en ordonnant les puissances de x
   $$(4a_2-1)+(12a_3-2a_1)x+\sum_{n\geq 2}[2(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-2na_n]x^n=0.$$
   Par unicité du DSE(0), on a
   $$\left\{\begin{array}{ll} 0= & 4a_2-1 \\ 0= & 12a_3-2a_1 \\ 0= & 2(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-2na_n, \text{ pour tout } n\geq 2 \end{array}\right.$$
   Par suite $a_2=\frac{1}{4}$ et $a_3=0$ puisque $a_1=0$.

   (b) Pour tout $n\geq 2$, $a_{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}a_n$, soit $a_n=\frac{n-2}{2n}a_{n-2}$, pour tout $n\geq 4$. Comme $a_3=0$, on a $a_{2p+1}=0$ pour tout $p\geq 0$ (par récurrence) et, pour tout $p\geq 2$,
   $$a_{2p}=\frac{2p-2}{2.2p}a_{2p-2}=\frac{(2p-2)(2p-4)\ldots 2}{2^{p-1}(2p)(2p-2)\ldots(4)}a_2=\frac{1}{2^p 2p}.$$
   La formule $a_{2p}=\frac{1}{2^p 2p}$ est vraie pour $p\geq 1$ et $y=\sum_{p\geq 1}\frac{1}{2^p 2p}x^{2p}$.

   (c) On a donc $y=S(x)$ et $R=\sqrt{2}>0$ et les hypothèses sont bien vérifiées.