

Examen du 8 Juin 2005 de l'unité LM231

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.

Les étudiants d'un groupe de TD ont une séance de travaux dirigés par semaine. La probabilité pour qu'un étudiant de ce groupe assiste à une séance donnée de travaux dirigés alors qu'il n'a pas assisté à la séance précédente est de $\frac{1}{4}$; la probabilité pour qu'il assiste à une séance donnée alors qu'il a assisté à la séance précédente est de $\frac{3}{4}$. L'élève Dupont se présente à la première séance de l'année. Quelle est la probabilité pour qu'il assiste à la dernière avant l'examen de janvier ? On rappelle que le premier semestre universitaire comporte 12 semaines.

Exercice 2.

- [A] Soit Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$, $0 < p < 1$), donnée par :

$$\mathbb{P}(Y = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

- 1) Calculer la fonction génératrice g de Y .
- 2) On suppose que n tend vers $+\infty$ et que p tend vers 0 de telle sorte que le produit np tende vers le nombre réel $\lambda > 0$.
 - a) Quelle est la limite de $\mathbb{P}(Y = k)$, $k \in \mathbb{N}$ fixé ?
 - b) Quelle est la limite de $g(s)$, $0 < s \leq 1$?

Reconnaître cette limite comme la fonction génératrice d'une loi usuelle.

- [B] Une roue de loterie comprend 10 quartiers identiques numérotés de 0 à 9 de telle sorte que, lorsqu'on lance la roue, la probabilité qu'elle s'arrête sur le numéro i est $\frac{1}{10}$ ($0 \leq i \leq 9$).

1. L'on effectue n lancers successifs indépendants de la roue et l'on note Y_i le nombre de fois où la roue s'arrête sur le numéro i ($0 \leq i \leq 9$).
 - 1) Quelle est la loi de Y_0 ? Comment peut-on décomposer Y_0 en la somme de n variables aléatoires de Bernouilli indépendantes ? Calculer la fonction génératrice, l'espérance et la variance de Y_0 . Quelle est la loi de Y_i ($0 \leq i \leq 9$) ?
 - 2) Calculer $\mathbb{P}(Y_0 = n_0, Y_1 = n_1, \dots, Y_9 = n_9)$, où $n_0, n_1, \dots, n_9$ désignent des entiers vérifiant : $n_0 + n_1 + \dots + n_9 = n$.
2. Utiliser le [A] 2) a) précédent pour donner une approximation de $\mathbb{P}(Y_0 = k)$, $0 \leq k \leq n$, lorsque n est "grand". Appliquer à $n = 50$.

3. L'on s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z_m égale au nombre minimum de lancers indépendants nécessaire pour obtenir m fois le numéro 0 ($m \geq 1$).

L'on introduit la variable aléatoire de Bernoulli X_r ($r \geq 1$) définie par :

$$\begin{cases} X_r = 1 & \text{si, au } r\text{ème lancer, la roue s'arrête sur le numéro 0} \\ X_r = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) On a donc Z_1 = nombre minimum de lancers indépendants nécessaire pour obtenir une fois le numéro 0.

$$= \inf \{n \geq 1, \text{ la roue s'arrête sur le numéro 0 au } n\text{ème lancer}\}.$$

Calculer $\mathbb{P}(Z_1 = k)$, $k \geq 1$. Reconnaître la loi de Z_1 . Calculer la fonction génératrice de Z_1 , son espérance et sa variance.

- 2) Décomposer l'événement $\{Z_1 = k, Z_2 - Z_1 = \ell\}$ à l'aide des v.a. X_r , $r \geq 1$. En déduire que les v.a. Z_1 et $Z_2 - Z_1$ sont indépendantes et de même loi.

- 3) Généraliser le 2) pour démontrer que : $Z_1, Z_2 - Z_1, \dots, Z_m - Z_{m-1}$ sont indépendantes et de même loi ($m \geq 2$). On supposera dorénavant : $m \geq 2$.

- 4) En déduire la fonction génératrice de Z_m , puis la loi de Z_m . On montrera :

$$\mathbb{P}(Z_m = k) = C_{k-1}^{m-1} \left(\frac{1}{10}\right)^m \left(\frac{9}{10}\right)^{k-m}, \quad k \geq m.$$

Que peut-on dire de $\frac{Z_m}{m}$ lorsque m tend vers $+\infty$?

- 5) Comment pouvez-vous justifier a posteriori l'expression de $\mathbb{P}(Z_m = k)$, $k \geq m$?

- 6) Montrer : $E\left(\frac{m-1}{Z_m-1}\right) = \frac{1}{10}$.

Exercice 3.

On considère un stock de N ampoules parmi lesquelles ν sont défectueuses. On choisit, au hasard, sans remise, n ampoules dans le stock et on appelle S la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défectueuses qu'on a ainsi récupérées parmi les n ampoules tirées.

- 1) Quelle est la loi de S ?

- 2) On formalise le problème en numérotant les ampoules de 1 à N et en prenant comme espace de probabilité Ω l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, N\}$ muni de la probabilité uniforme.

On introduit les variables aléatoires X_i , $1 \leq i \leq n$, définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si la } i\text{ème ampoule tirée est défectueuse} \\ X_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de telle sorte que : $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- a) Montrer que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\nu}{N}$, $1 \leq i \leq n$. On pourra considérer les permutations σ de $\{1, 2, \dots, N\}$ telles que $\sigma(i)$ correspond au numéro d'une pièce défectueuse.

Calculer l'espérance et la variance de X_i , puis l'espérance de S .

- b) Montrer que $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{\nu}{N} \frac{\nu-1}{N-1}$, $1 \leq i < j \leq n$. X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

En déduire $\text{cov}(X_i, X_j)$, puis calculer la variance de S .

- c) Comparer l'espérance et la variance de S à l'espérance et à la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale.

Université Pierre et Marie Curie

Licence de Mathématiques - Niveau L2

Année universitaire 2004 - 2005

Corrigé de l'examen du 8 Juin 2005 de l'unité LM 231

Exercice 1 Soit A_k , $1 \leq k \leq 12$, l'ensemble défini par :

$A_k = \{ \text{l'élève Dupont se présente à la } k\text{ième séance} \}$

Les hypothèses se traduisent par : $\mathbb{P}(A_1) = 1$ et :

$$k \geq 2, \quad \mathbb{P}(A_k / A_{k-1}) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(A_k / A_{k-1}^c) = \frac{1}{4}$$

Elles entraînent :

$$\begin{aligned} k \geq 2, \quad \mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}(A_k / A_{k-1}) \mathbb{P}(A_{k-1}) + \mathbb{P}(A_k / A_{k-1}^c) \mathbb{P}(A_{k-1}^c) \\ &= \frac{3}{4} \mathbb{P}(A_{k-1}) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(A_{k-1}^c) \\ &= \frac{3}{4} \mathbb{P}(A_{k-1}) + \frac{1}{4} [1 - \mathbb{P}(A_{k-1})] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(A_{k-1}) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Posant : $1 \leq k \leq 12$, $\mathbb{P}(A_k) = u_k$, on en déduit :

$$u_1 = 1 \text{ et } , 2 \leq k \leq 12, \quad u_k = \frac{1}{2} u_{k-1} + \frac{1}{4}$$

$$\text{soit } u_1 = 1 \text{ et } , 2 \leq k \leq 12, \quad u_k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(u_{k-1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{d'où } u_1 = 1 \text{ et } , 2 \leq k \leq 12, \quad u_k - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \left(u_1 - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$\text{et enfin } u_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4096}$$

$$\begin{aligned} \text{Exercice 2 } \boxed{A} \quad 1) \quad g(\lambda) &= \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \lambda^k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k (p\lambda)^k (1-p)^{n-k} = (p\lambda + 1-p)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad a) \quad \mathbb{P}(Y=k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} [np][(n-1)p] \cdots [(n-k+1)p] e^{(n-k) \log(1-p)} \end{aligned}$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$ et p tend vers 0 de telle sorte que

np tende vers λ , tous les termes du type $[(n-i)p]$, $1 \leq i \leq k-1$, (2) convergent vers λ et le terme $(n-k) \log(1-p)$ est équivalent à $(-np)$, donc $\mathbb{P}(Y=k)$ converge vers $\frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$, qui correspond à la loi de Poisson de paramètre λ .

B) La fonction g peut s'écrire, $0 \leq s \leq 1$, $g(s) = e^{n \log(1+p(s-1))}$ lorsque n tend vers $+\infty$ et p tend vers 0 de telle sorte que np tende vers λ (s est fixe), $\log(1+p(s-1))$ est équivalent à $p(s-1)$ et $g(s)$ converge donc vers $e^{\lambda(s-1)}$, qui est la fonction génératrice de la loi de Poisson trouvée en a).

[B] (1) Si l'on pose: $1 \leq i \leq n$,
$$\begin{cases} Z_0^i = 1 & \text{si la roue s'arrête sur le 0 au } i\text{ème lancer,} \\ Z_0^i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

les v.a. $(Z_0^i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes, de même loi de

Bernouilli donnée par: $\mathbb{P}(Z_0^i = 1) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(Z_0^i = 0) = \frac{9}{10}$

et on peut écrire: $Y_0 = \sum_{i=1}^n Z_0^i$.

Par suite, la v.a. Y_0 suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{10}$.

D'après A, sa fonction génératrice est donnée par:

$$0 \leq s \leq 1, \quad g_{Y_0}(s) = \left(\frac{s}{10} + \frac{9}{10} \right)^n$$

On obtient alors facilement, soit par calcul direct, soit par dérivation de la fonction génératrice (cf cours et T.D.):

$$\mathbb{E}(Y_0) = \frac{n}{10} \quad \text{et} \quad \text{var } Y_0 = n \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9n}{100}$$

Par symétrie sur les i , $0 \leq i \leq 9$, la loi de Y_i est la même que celle de Y_0 , soit la loi binomiale $B(n, \frac{1}{10})$.

2) $\mathbb{P}(Y_0 = n_0, Y_1 = n_1, \dots, Y_9 = n_9)$.

$= \mathbb{P}(\text{la roue s'arrête } n_0 \text{ fois sur 0, } n_1 \text{ fois sur 1, } \dots, n_9 \text{ fois sur 9})$

$$= \mathbb{P} \left(\bigcup_{\Lambda} \left\{ \begin{array}{l} \text{on obtient } 0 \text{ aux lancers } i_1^0, i_2^0, \dots, i_{n_0}^0, \\ \text{on obtient } 1 \text{ aux lancers } i_1^1, i_2^1, \dots, i_{n_1}^1, \\ \vdots \\ \text{on obtient } g \text{ aux lancers } i_1^g, i_2^g, \dots, i_{n_g}^g \end{array} \right\} \right) \quad [3]$$

où Λ est une partition quelconque de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en g ensembles de tailles respectives $n_0, n_1, n_2, \dots, n_g$, soit :

$$E_1 = \{i_1^0, i_2^0, \dots, i_{n_0}^0\}, \dots, E_1 = \{i_1^1, i_2^1, \dots, i_{n_1}^1\}, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } & \mathbb{P}(Y_0 = n_0, Y_1 = n_1, \dots, Y_g = n_g) \\ &= \sum_{\Lambda} \mathbb{P}(\text{on obtient } 0 \text{ au } i_1^0 \text{ème lancer, on obtient } 0 \text{ au } i_2^0 \text{ème} \dots) \\ &= \sum_{\Lambda} \left(\frac{1}{10}\right)^{n_0} \left(\frac{1}{10}\right)^{n_1} \dots \left(\frac{1}{10}\right)^{n_g} = \sum_{\Lambda} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &= \frac{1}{(10)^n} (\text{nombre de partitions } \Lambda) \\ &= \frac{1}{10^n} \binom{n_0}{n} \binom{n_1}{n-n_0} \binom{n_2}{n-n_0-n_1} \dots \binom{n_g}{n-n_0-n_1-\dots-n_g} \\ &= \frac{1}{10^n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_g!} \end{aligned}$$

On trouve ainsi, pour la v.a. $(Y_0, Y_1, \dots, Y_g)$ la loi multinomiale de paramètres $(n, n_1, n_2, \dots, n_g, \frac{1}{10})$

② On applique l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson trouvée au [A] 2) a)

$$\text{Ici, } np = 50 \times \frac{1}{10} = 5, \text{ d'où } \lambda = 5 \text{ et l'approximation}$$

$$0 \leq k \leq n, \quad \mathbb{P}(Y_0 = k) \approx \frac{e^{-5} 5^k}{k!}$$

$$\textcircled{3} \text{ 1) } \mathbb{P}(Z_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1)$$

Par indépendance des lancers, donc des v.a. $(X_r)_{r \geq 1}$,

$$\begin{aligned} \text{on obtient : } k \geq 1, \quad \mathbb{P}(Z_1 = k) &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(X_2 = 0) \dots \mathbb{P}(X_{k-1} = 0) \mathbb{P}(X_k = 1) \\ &= \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} \end{aligned}$$

La loi de Z_1 est la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $\frac{1}{10}$. (4)

Sa fonction génératrice se calcule facilement :

$$\begin{aligned} g_{Z_1}(s) &= \sum_{k \geq 1} s^k \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} = \frac{s}{10} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{9s}{10}\right)^{k-1} \\ &= \frac{s}{10} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{9s}{10}\right)^k = \frac{s/10}{1 - 9s/10} = \frac{s}{10 - 9s} \end{aligned}$$

L'espérance et la variance peuvent s'obtenir par calcul direct ou dérivation de la fonction génératrice (cf cours et TD).

On obtient : $E(Z_1) = 10$, $\text{var}(Z_1) = 90$

$$2) k \geq 0, l \geq 0, \{Z_1 = k, Z_2 - Z_1 = l\} = \{X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_{k+l-1} = 0, X_{k+l} = 1\}$$

Par indépendance des v.a. $(X_r)_{r \geq 1}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(Z_1 = k, Z_2 - Z_1 = l) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{l-1} \frac{1}{10}$$

La décomposition de cette quantité en un produit d'une fonction de k et d'une fonction de l entraîne l'indépendance des v.a.

Z_1 et $Z_2 - Z_1$ et la propriété :

$$\left\{ k \geq 0, \mathbb{P}(Z_1 = k) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} \right. \quad (\text{on le savait déjà !})$$

$$\left. \left\{ l \geq 0, \mathbb{P}(Z_2 - Z_1 = l) = \left(\frac{9}{10}\right)^{l-1} \frac{1}{10} \right. \right.$$

d'où la même loi pour Z_1 et $Z_2 - Z_1$

3) La généralisation se fait de la même façon que précédemment, en décomposant l'ensemble : $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_m \geq 0,$

$$\{Z_1 = k_1, Z_2 - Z_1 = k_2, \dots, Z_m - Z_{m-1} = k_m\}$$

$$= \{X_1 = 0, \dots, X_{k_1-1} = 0, X_{k_1} = 1, X_{k_1+1} = 0, \dots, X_{k_1+k_2-1} = 0, X_{k_1+k_2} = 1, \\ X_{k_1+k_2+1} = 0, \dots, X_{k_1+k_2+k_3-1} = 0, X_{k_1+k_2+k_3} = 1, \dots\}$$

ce qui entraîne :

$$\mathbb{P}(Z_1 = k_1, Z_2 - Z_1 = k_2, \dots, Z_m - Z_{m-1} = k_m) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k_1-1} \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{k_2-1} \frac{1}{10} \dots \left(\frac{9}{10}\right)^{k_m-1} \frac{1}{10}$$

et donc la propriété demandée.

4) D'après 3), les v.a. Z_1 et $(Z_j - Z_{j-1})_{j \geq 2}$ suivent toutes la même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $\left(\frac{1}{10}\right)$. On en déduit: $0 \leq \Delta \leq 1$, $g_{Z_j - Z_{j-1}}(\Delta) = \frac{\Delta}{10 - 9\Delta}$, pour tout $j \geq 2$. De plus, elles sont indépendantes et:

$$m \geq 2, Z_m = Z_1 + (Z_2 - Z_1) + (Z_3 - Z_2) + \dots + (Z_m - Z_{m-1})$$

d'où: $0 \leq \Delta \leq 1$, $g_{Z_m - Z_{m-1}}(\Delta) = \left(\frac{\Delta}{10 - 9\Delta}\right)^m$

La décomposition de g_{Z_m} en série entière conduit à:

$$\begin{aligned} g_{Z_m}(\Delta) &= \Delta^m \left(\frac{1}{10 - 9\Delta}\right)^m = \left(\frac{\Delta}{10}\right)^m \frac{1}{\left(1 - \frac{9\Delta}{10}\right)^m} \\ &= \left(\frac{\Delta}{10}\right)^m \sum_{j \geq 0} \frac{(-m)(-m-1) \dots (-m-j+1)}{j!} \left(-\frac{9\Delta}{10}\right)^j \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{m(m+1)(m+2) \dots (m+j-1)}{j!} \left(\frac{1}{10}\right)^m \left(\frac{9}{10}\right)^j \Delta^{j+m} \\ \text{en posant } k = j+m, &= \sum_{k \geq m} \frac{m(m+1) \dots (k-1)}{(k-m)!} \left(\frac{1}{10}\right)^m \left(\frac{9}{10}\right)^{k-m} \Delta^k \\ &= \sum_{k \geq m} \frac{(k-1)!}{(m-1)! [(k-1)-(m-1)]!} \left(\frac{1}{10}\right)^m \left(\frac{9}{10}\right)^{k-m} \Delta^k \end{aligned}$$

on en déduit: $k \geq m$, $\mathbb{P}(Z_m = k) = C_{k-1}^{m-1} \left(\frac{1}{10}\right)^m \left(\frac{9}{10}\right)^{k-m}$

Ensuite, la loi des grands nombres entraîne que:

$$\frac{Z_m}{m} = \frac{Z_1 + (Z_2 - Z_1) + \dots + (Z_m - Z_{m-1})}{m}$$

converge en probabilité vers $\mathbb{E}(Z_1) = 10$ lorsque m tend vers $+\infty$

5) on peut écrire: $\{Z_m = k\} = \{\text{numéro 0 obtenu exactement } (m-1) \text{ fois pendant les } (k-1) \text{ premiers lancers et obtenu au } k^{\text{ième}} \text{ lancer}\}$

soit, par indépendance des lancers,

$$\mathbb{P}(Z_m = k) = \mathbb{P}(\text{n° 0 obtenu } (m-1) \text{ fois pendant les } (k-1) \text{ premiers lancers}) \mathbb{P}(\text{n° 0 obtenu au } k^{\text{ième}} \text{ lancer})$$

$$= \left[C_{k-1}^{m-1} \left(\frac{1}{10} \right)^{m-1} \left(\frac{9}{10} \right)^{k-m} \right] \frac{1}{10} \quad (6)$$

cf. place des lanceurs où l'on obtient le n° 0

$$\begin{aligned} 6) \mathbb{E} \left(\frac{m-1}{Z_{m-1}} \right) &= \sum_{k \geq m} \frac{m-1}{k-1} \frac{(k-1)!}{(m-1)! ((k-1)-(m-1))} \left(\frac{1}{10} \right)^m \left(\frac{9}{10} \right)^{k-m} \\ &= \sum_{k \geq m} \frac{(k-2)!}{(m-2)! ((k-2)-(m-2))} \left(\frac{1}{10} \right)^{m-1} \left(\frac{9}{10} \right)^{(k-1)-(m-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en posant } l = k-1, \quad &= \frac{1}{10} \sum_{l \geq m-1} C_{l-1}^{(m-1)-1} \left(\frac{1}{10} \right)^{m-1} \left(\frac{9}{10} \right)^{l-(m-1)} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{l \geq m-1} \mathbb{P}(Z_{m-1} = l) = \frac{1}{10} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 3 1) Il s'agit d'un tirage sans remise. La v.a. S suit alors la loi hypergéométrique donnée par :

$$\begin{aligned} (0 \leq k \leq r, \quad 0 \leq n-k \leq N-r) \quad \mathbb{P}(S = k) &= \frac{C_r^k C_{N-r}^{n-k}}{C_N^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad a) \quad \mathbb{P}(X_i = 1) &= \frac{\text{nb de permutations } \sigma \text{ telles que } \sigma(i) \text{ est le n}^\circ \text{ d'une pièce déf.}}{\text{nb total de permutations}} \\ &= r \frac{A_{N-1}^{n-1}}{A_N^n} = \frac{r}{N} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{r}{N}, \quad \text{var } X_i = \frac{r}{N} \left(1 - \frac{r}{N} \right), \quad \mathbb{E}(S) = n \frac{r}{N}$$

b) De la même manière, $1 \leq i < j \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) &= \frac{\text{nb de permutations } \sigma \text{ telles que } \sigma(i) \text{ et } \sigma(j) \text{ sont les n}^\circ \text{s de pièces déf.}}{\text{nb total de permutations}} \\ &= r(r-1) \frac{A_{N-2}^{n-2}}{A_N^n} = \frac{r(r-1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

On voit immédiatement que X_i et X_j ne sont pas des v.a. indépendantes puisque : $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) \neq \mathbb{P}(X_i = 1) \mathbb{P}(X_j = 1)$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) \\ &= \frac{r(r-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{r}{N}\right)^2 = \frac{r(r-N)}{N^2(N-1)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \text{var } S &= \text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{var } X_i + \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= n \frac{r}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) + n(n-1) \frac{r(r-N)}{N^2(N-1)} \\ &= n \frac{r}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \left[1 - \frac{n-1}{N-1}\right] \end{aligned}$$

c) Pour une v.a. T de loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{r}{N}$, on obtient $E(T) = n \frac{r}{N} = E(S)$, mais

$$\text{var } S = n \frac{r}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \left[1 - \frac{n-1}{N-1}\right], \text{ d'où } \text{var } S \neq \text{var } T.$$

Examen du 14 septembre 2005 de l'unité LM231

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1 :

1°) On lance deux dés (non pipés).

a) Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats vaille 4 ,
soit supérieure à 9 ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'un des résultats soit pair et l'autre
impair ?

2°) On lance n fois deux dés. Soit X le nombre de fois où l'un des
résultats est pair et l'autre impair.

a) Quelle est la limite en probabilité de $\frac{X}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

b) Soit $a > 0$. Quelle est la limite (donnée sous forme d'une intégrale)
de $P(X \leq \frac{n}{2} + a\sqrt{n})$ quand $n \rightarrow +\infty$.

3°) On lance n fois un dé (n fixé). Soit Y le plus grand résultat
obtenu. Calculer $P(Y \leq m)$ et en déduire $P(Y = m)$; $m = 1, 2 \dots 6$.

Exercice 2 : On considère des v.a. indépendantes, de même loi $Y_1, \dots, Y_n, \dots$

telles que $P(Y_n = 1) = p$, $P(Y_n = 0) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$.

Un joueur joue au jeu suivant : au départ, sa fortune est $X_0 = 1$; si sa
fortune après le $n^{\text{ième}}$ coup vaut X_n , au $(n+1)^{\text{ème}}$ coup, elle s'accroît de αX_n
si $Y_{n+1} = 1$, elle diminue de βX_n si $Y_{n+1} = 0$ où α, β sont donnés avec
 $0 < \alpha$, $0 < \beta < 1$.

1°) Trouver (en fonction de α et β) deux nombres réels a et b tels que,
pour tout $n \geq 0$, $X_{n+1} = (a + b \cdot Y_{n+1}) \cdot X_n$.

2°) En déduire la valeur de X_n en fonction de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

3°) Calculer $E(X_n)$. En déduire, suivant les valeurs de α, β, p , la limite
de $E(X_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

4°) On pose $U_k = \log(a + b Y_k)$. Calculer $E(U_k)$. Quelle est la limite en probabilité de $\frac{1}{n} (U_1 + \dots + U_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

5°) En déduire la limite en probabilité de $\frac{1}{n} \log X_n$, $n \rightarrow +\infty$.

En déduire, lorsque $(1 + \alpha)^p (1 - \beta)^q < 1$, la limite en probabilité de X_n . Lorsque $p = q = \frac{1}{2}$, montrer qu'on peut trouver α et β tels que $X_n \rightarrow 0$ en probabilité et $E(X_n) \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 : A | Soient a, b, u, v, w cinq nombres compris entre 0 et 1.

On considère des v.a. à valeurs 0 ou 1, $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$

telles que, pour tout i , $P[U_i = 1] = a$, $P[V_i = 1] = b$,

$P[U_i = 1, V_i = 1] = 0$, et, pour tout i, j , $i \neq j$,

$P[U_i = 1, U_j = 1] = u$, $P[U_i = 1, V_j = 1] = v$, $P[V_i = 1, V_j = 1] = w$.

On pose $X = \sum_{i=1}^n U_i$, $Y = \sum_{i=1}^n V_i$.

1°) Calculer $E(U_i)$ puis $E(X)$. Que vaut $E(Y)$?

2°) Calculer $E(U_i U_j)$ puis $\text{Var}(X)$. Que vaut $\text{Var}(Y)$?

3°) Calculer $E(U_i V_j)$ puis $\text{Cov}(X, Y)$.

B | Une urne contient r boules; r_1 de type 1, r_2 de type 2, r_3 de type 3; $r = r_1 + r_2 + r_3$. On en tire n ($2 \leq n \leq r$) sans remplacement. Soient X (resp Y) le nombre de boules de type 1 (resp. de type 2) tirées et A_i (resp B_i) l'événement "la i ème boule tirée est de type 1" (resp de type 2).

1°) Calculer $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(A_1 A_2)$, $P(B_1 B_2)$, $P(A_1 B_2)$, $P(B_1 A_2)$.

2°) En déduire, en utilisant convenablement A |, $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$ puis calculer le coefficient de corrélation de X et Y .