Université Pierre et Marie Curie
LM 226 (2005-2006)

GRAPHES ET COMBINATOIRE

Corrigé succint de l'examen du 29 juin 2006

Exercice I

1. Soit $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ un polygone, dont l'ensemble des sommets est $A_1, \ldots, A_k$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} [\![1,k]\!] & \longrightarrow & [\![1,k]\!] \\ j & \longmapsto & i_j \end{array}$$

est bijective. Pour une telle permutation de $[\![1,k]\!]$, on obtient $2k$ polygones égaux. Le nombre des permutations de $[\![1,k]\!]$, étant $k!$, le nombre de polygones, dont l'ensemble des sommets est $A_1, \ldots, A_k$, est $\dfrac{k!}{2k} = \dfrac{(k-1)!}{2}$ (théorème des bergers).
Remarque : On peut aussi raisonner par récurrence.

2.a. Un triangle, dont les sommets appartiennent à E, est déterminé, de manière unique, par l'ensemble de ses sommets, donc par la donnée d'un sous–ensemble de E, de cardinal 3. On en déduit que le nombre de triangles distincts, dont les sommets appartiennent à E, est $\dbinom{n}{3}$.

2.b. Le nombre de sous–ensembles, de cardinal k, de E est $\dbinom{n}{k}$. Soit F un de ces sous–ensembles. D'après la question 1, le nombre de polygones distincts, dont l'ensemble des sommets est F, est $\dfrac{(k-1)!}{2}$. Le nombre de polygones d'ordre k, dont les sommets appartiennent à E est donc :

$$\frac{(k-1)!}{2}\binom{n}{k} = \frac{(k-1)!}{2}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(2k)(n-k)!}.$$

3. Un sous–polygone est entièrement déterminé par l'ensemble de ses sommets. Pour $3 \le p \le k$, le nombre de sous–polygones, d'ordre p, d'un polygone, d'ordre k est donc $\dbinom{k}{p}$.

Exercice II

1.a. Pour $\Delta = 0$, tous les sommets de G sont isolés. Le graphe G étant connexe, il est réduit à un sommet isolé et $n = 1$.
Réciproquement, si $n = 1$, le graphe G étant sans cycle, il n'admet pas de boucle, donc $\Delta = 0$ et G est réduit à un sommet isolé.

1.b. Pour $\Delta = 1$, d'après 1.a, on a $n \geq 2$. D'autre part, en notant m le nombre d'arêtes du graphe G, on a : $m \leq \dfrac{n\Delta}{2} = \dfrac{n}{2}$. De plus, le graphe G étant un arbre, on a : $m = n - 1$, donc $n - 1 \leq \dfrac{n}{2}$, d'où $n \leq 2$ et $n = 2$.

Réciproquement, supposons $n = 2$. Le graphe G étant simple et connexe, il est formé de deux sommets reliés par une arête, donc $\Delta = 1$ et G est une 1–chaîne.

2. Pour $n = 1$, le graphe G est réduit à un sommet isolé, donc $n_0 = 1$.
Pour $n \geq 2$, le graphe G étant connexe, on a : $n_0 = 0$.

3.a. Soit $n \geq 2$. Le graphe G étant connexe, il contient au moins une arête, donc $\Delta \geq 1$.
Soit u un sommet de G de degré Δ, et soit v un voisin de u. Notons e l'arête $\{u,v\}$. La suite (u,e,v) est alors une chaîne élémentaire, dont une extrémité est u. Soit $C = (v_1,e_1,\ldots e_k,v_{k+1})$ une chaîne élémentaire, commençant par (u,e,v) et qui soit de longueur maximale. Notons v' la deuxième extrémité de C ($v' = v_{k+1}$). On a $d(v') \geq 1$. Supposons $d(v') \geq 2$ et notons w un des voisins de v', distinct de v_k. Le graphe G étant sans cycle, le sommet w n'appartient pas à l'ensemble $\{v_1,\ldots,v_k\}$, ce qui est contraire au fait que C soit de longueur maximale. On a donc $d(v') = 1$.
On a ainsi Δ chaînes, dont l'une des extrémités est u et dont l'autre extrémité est de degré 1. De plus, le graphe G étant sans cycle, les Δ extrémités de degré 1 de ces chaînes sont distinctes. On a donc $n_1 \geq \Delta$.

D'autre part, on sait qu'un arbre, d'ordre supérieur ou égal à 2, admet au moins deux sommets de degré 1. On en déduit $n_1 \geq 2$, donc $n_1 \geq \max(2,\Delta)$.

3.b. Pour $k \geq 2$, soit $V = \{v_0,v_1,\ldots,v_k\}$ et soit $E = \Big\{\{v_0,v_i \mid i \in [\![1,k]\!]\}\Big\}$. Le graphe $G = (V,E)$ est un arbre admettant k sommets $v_1,\ldots,v_k$ de degré 1 et un sommet v_0, de degré k.

4.a. Pour $0 \leq i \leq \Delta$, notons V_i l'ensemble dês sommets de degré i. On a $|V_i| = n_i$ et $V = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{\Delta} V_i$. De plus, les ensembles $V_0,\ldots,V_\Delta$ sont deux à deux disjoints. On en déduit : $|V| = \displaystyle\sum_{i=0}^{\Delta} |V_i| = \sum_{i=0}^{\Delta} n_i$, donc

$$\sum_{i=0}^{\Delta} n_i = n.$$

D'autre part, on a : $\sum_{i=0}^{\Delta} in_i = \sum_{v \in V} v = 2m$. Le graphe G étant un arbre, on en déduit :

$$\sum_{i=0}^{\Delta} in_i = 2(n-1).$$

4.b. De la question 4.a, on déduit, pour $\Delta \geq 2$, $\sum_{i=2}^{\Delta} in_i = 2(n-1) - n_1$. et $\sum_{i=2}^{\Delta} 2n_i = 2(n - n_0 - n_1)$. Or, d'après la question 2, on a $n_0 = 0$, donc $\sum_{i=2}^{\Delta}(i-2)n_i = 2n - 2 - n_1 - 2n + 2n_1 = n_1 - 2$. On obtient :

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta}(i-2)n_i.$$

5.a. Si G ne contient que des sommets de degré 1 et 3, on a : $n \geq 2$ et $\Delta = 1$ ou 3.
D'après la question 1, pour $\Delta = 1$, le graphe G est la 1–chaîne et on a : $n = 2$, $n_3 = 0 = \dfrac{n-2}{2}$ et $n_1 = 2 = \dfrac{n+2}{2}$.
Pour $\Delta = 3$, d'après la question 4.a, $n = n_1 + n_3$, et d'après la question 4.b, $n_1 = 2 + n_3$. On en déduit que $n = 2 + 2n_3$, donc que n est pair, que $n_3 = \dfrac{n-2}{2}$ et que $n_1 = 2 + \dfrac{n-2}{2} = \dfrac{n+2}{2}$.

5.b. Si le graphe G contient exactement un sommet de degré 2, on a $n \geq 3$ et $n_2 = 1$. Si on a, de plus, $\Delta \leq 3$, alors $\Delta = 2$ ou 3.

Pour $\Delta = 2$, on a $n_3 = 0$ et, d'après 4.b, $n_1 = 2$, donc $n = n_1 + n_2 = 3$, impair, $n_3 = 0 = \dfrac{3-3}{2} = \dfrac{n-3}{2}$ et $n_1 = 2 = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$.
Pour $\Delta = 3$, on a, d'après 4.b, $n_1 = 2 + n_3$. On obtient :
$n = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + n_3 + 1 + n_3 = 3 + 2n_3$, impair,
$n_3 = \dfrac{n-3}{2}$ et $n_1 = 2 + \dfrac{n-3}{2} = \dfrac{n+1}{2}$.

6.a. On a vu, à la question 1.b, que, pour $\Delta = 1$, on a $n = 2$ et $n_1 = 2$.
D'autre part, d'après la question 4.b, pour $\Delta = 2$, on a $n_1 = 2$.

Réciproquement, supposons maintenant $n_1 = 2$. On en déduit $\Delta \geq 1$. Supposons $\Delta \geq 3$. D'après la question 4.b, on a : $n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta}(i-2)n_i = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta}(i-2)n_i$, d'où, avec $n_1 = 2$, pour tout $i \geq 3$, $n_i = 0$, ce qui est contraire à $\Delta \geq 3$. On a ainsi prouvé $\Delta \leq 2$, donc $\Delta \in \{1,2\}$.

6.b. Pour $n \geq 2$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante :
Le seul arbre d'ordre n, ayant exactement deux sommets de degré 1, est la n–chaîne.
On a déjà vu, à la question 1.b, que la propriété $\mathcal{P}_2$ est vraie. Fixons donc $n \geq 2$, supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie et montrons que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Soit $G = (V,E)$ un arbre d'ordre $n+1$, ayant exactement deux sommets de degré 1 : v et w. Le graphe G étant connexe, d'ordre supérieur ou égal à 3, les sommets v et w ne sont pas adjacents. Le sous–graphe, $G_{V\setminus\{v\}}$, engendré par $V \setminus \{v\}$ est d'ordre n et admet exactement deux sommets de degré 1 : w et le voisin v' de v dans G. D'après l'hypothèse de récurrence, le graphe $G_{V\setminus\{v\}}$ est une n–chaîne. Le graphe G, obtenu, à partir de $G_{V\setminus\{v\}}$, en rajoutant le sommet v et l'arête $\{v',v\}$ est donc une $(n+1)$–chaîne.