Université Pierre et Marie Curie
LM 226 (2005-2006)

GRAPHES ET COMBINATOIRE

Examen du 29 juin 2006

Durée 2 heures

Calculatrices, documents et portables interdits

Les exercices I et II sont indépendants

Question de cours

Somme des degrés d'un graphe, parité du nombre de sommets de degré impair (énoncés précis et preuves).

Exercice I

Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Un polygone d'ordre k du plan est défini par un ensemble de k points *distincts* $\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$ (les sommets du polygone) et un ensemble de k segments $\{[A_1,A_2],[A_2,A_3],\ldots,[A_{k-1},A_k],[A_k,A_1]\}$ (les côtés du polygone).
On note $(A_1,\ldots,A_k)$ un tel polygone.
Remarquer que, par exemple, les polygones $(A_1,A_2,\ldots,A_k)$, $(A_2,A_3,\ldots,A_k,A_1)$, $(A_k,A_{k-1},\ldots,A_1)$, $(A_1,A_k,A_{k-1}\ldots,A_2)$ sont égaux.

1. Montrer que le nombre de polygones distincts d'ordre k, dont l'ensemble $\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$ des sommets est fixé, est $\dfrac{(k-1)!}{2}$.

2. Soit E un ensemble fini de points du plan, de cardinal $n \geq 3$.

a. Calculer le nombre de triangles (polygones d'ordre 3) (distincts), dont les sommets appartiennent à E.

b. Pour $3 \leq k \leq n$, calculer le nombre de polygones d'ordre k, dont les sommets appartiennent à E.

3. Soit p un entier tel que $3 \leq p \leq k$. Un sous–polygone d'ordre p d'un polygone $(A_1,\ldots,A_k)$ est un polygone $(A_{i_1},\ldots,A_{i_p})$, avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq k$. Calculer le nombre de sous–polygones d'ordre p d'un polygone d'ordre k.

Exercice II

Soit $G = (V,E)$ un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ.
Pour tout entier i, positif ou nul, on note n_i le nombre de sommets de G, de degré i. On remarque que, pour $i > \Delta$, on a $n_i = 0$.

1. Montrer les équivalences :

a. $$\Delta = 0 \Leftrightarrow n = 1$$

b. $$\Delta = 1 \Leftrightarrow n = 2$$

et décrire, dans les deux cas, les arbres correspondants.

2. Donner la valeur de n_0, en fonction de n.

3.a. Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $n_1 \geq \Delta$.
En déduire :

$$n_1 \geq \max(2,\Delta).$$

3.b. Trouver, pour tout entier $k \geq 2$, un arbre tel que $\Delta = n_1 = k$.

4.a. Calculer, en fonction de n, les sommes :

$$\sum_{i=0}^{\Delta} n_i \text{ et } \sum_{i=0}^{\Delta} i n_i.$$

4.b. En déduire que, pour $\Delta \geq 2$, on a :

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2) n_i.$$

5.a. Montrer que, si G ne contient que des sommets de degré 1 et 3, alors n est pair, $n_3 = \dfrac{n-2}{2}$ et $n_1 = \dfrac{n+2}{2}$.

5.b. Montrer que, si G contient exactement un sommet de degré 2 et si $\Delta \leq 3$, alors n est impair, $n_3 = \dfrac{n-3}{2}$ et $n_1 = \dfrac{n+1}{2}$.

6.a. Montrer que :

$$\Delta \in \{1,2\} \Longleftrightarrow n_1 = 2.$$

6.b. Montrer, par récurrence, que, dans ce cas, G est une chaîne.