LM226

EXAMEN FINAL - 7 juin 2005

Durée 2 heures

Calculatrices, documents et portables interdits

Les excercices I et II sont independants

[I] Soit $f(n,k)$ le nombre de manières de colorier k balles (indistinguables) avec n couleurs différentes

(a) Calculer $f(1,k)$ pour tout $k \geq 1$ et $f(n,1)$ pour tout $n \geq 1$.

(b) Trouver une formule récurrente pour $f(n,k)$, $n,k \geq 2$. (*indication :* on pourra distinguer le cas où une couleur fixée est utilisée et le cas où elle n'est pas utilisée).

(c) Trouver $f(2,2)$. En déduire la valeur de $f(3,2)$, puis de $f(4,2)$.

Soit $h(n,k)$ le nombre de manières de colorier k balles (indistinguables) avec n couleurs différentes tel que chaque couleur est utilisée au moins une fois.

(d) Montrer que, pour $n > k$, $h(n,k) = 0$.

(e) Montrer que, pour $k \geq n$, $h(n,k) = f(n,k-n)$. Trouver la valeur de $h(4,7)$.

[II] (1) Un graphe est dit *hamiltonien* s'il admet un cycle hamiltonien, c'est-à-dire, un cycle élémentaire qui passe par chaque sommet du graphe une fois et une seule. Soit $G = (V,E)$ un graphe simple hamiltonien. Montrer que

(a) $|V| \geq 3$,

(b) G ne contient pas de sommet de degré 1,

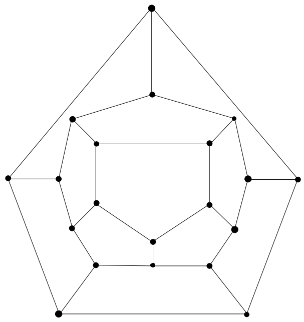
(c) G est connexe,

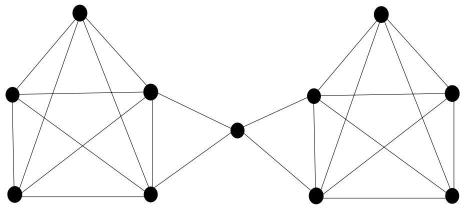
(d) G n'a pas de sommet d'articulation (un sommet v d'un graphe connexe H est dit *d'articulation* si $H \setminus \{v\}$ n'est pas connexe),

(e) la réciproque de la partie (d) n'est pas vraie. Pour cela, on exhibera un graphe connexe d'ordre 5 qui n'est pas hamiltonien et qui n'admet pas de sommet d'articulation,

(f) pour tout sous-ensemble S non vide de V, le nombre de composantes connexes de $V \setminus S$ est inférieur ou égal à $|S|$.

(g) Déterminer si chaque graphe ci-dessous est hamiltonien :





(2) Un graphe simple $G = (V, E)$ est dit *hypohamiltonien* s'il n'admet pas un cycle hamiltonien et pour tout sommet v de G, $G \setminus \{v\}$ est hamiltonien. Soit G un graphe simple hypohamiltonien avec $|V| = n$.

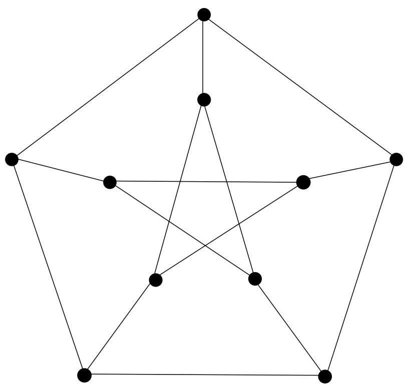
(a) Montrer que, pour tout $v \in V$, $d(v) \geq 3$ (*indication :* on pourra utiliser 1(b)).

(b) Pour tout réel r, on note $\lfloor r \rfloor$ la partie entière de r. Montrer que, pour tout $v \in V$, $d(v) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (*indication :* on pourra démontrer l'inégalité par contradiction).

(c) Montrer que $n \geq 8$.

(d) Soit P le graphe de Petersen (ci-dessous). Montrer que pour tout sommet v de P, $P \setminus \{v\}$ est hamiltonien.

[Commentaire : en fait, P est hypohamiltonien car P n'est pas hamiltonien (on ne demande pas de démontrer ce dernier résultat).]



CORRIGÉ EXAMEN FINAL - 7 juin 2005

I.- (a) $f(1,k) = 1$, car toutes les balles sont coloriées avec l'unique couleur disponible et $f(n,1) = n$, car l'unique balle peut être coloriée avec une de n couleurs possibles.

(b) $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n,k-1)$. En effet, dans toute coloration on a deux choix (disjoints) : on utilise ou on n'utilise pas la couleur j. Si la couleur j n'est pas utilisée alors il faut compter le nombre de colorations de k balles avec $n-1$ couleurs, c'est-à-dire, $f(n-1,k)$. Par contre, si la couleur j est utilisée alors il y a au moins une balle coloriée avec la couleur j et il reste donc à trouver le nombre de colorations de $k-1$ balles avec toujours n couleurs, c'est-à-dire, $f(n,k-1)$.

(c) $f(2,2) = 3$ (dans ce cas, les colorations possibles sont : 2 rouges ou bien 2 blanches ou bien 1 rouge et 1 blanche). $f(3,2) = f(2,2) + f(3,1) = 3 + 3 = 6$ (dans ce cas, les colorations possibles sont : soit 2 rouges, soit 2 blanches, soit 2 vertes, soit 1 rouge et 1 blanche, soit 1 rouge et 1 verte, soit 1 blanche et 1 verte). $f(4,2) = f(3,2) + f(4,1) = 6 + 4 = 10$.

(d) $h(n,h) = 0$ si $n > k$, car il n'y pas assez des balles pour utiliser toutes les couleurs.

(e) Parmi les k balles, on colorie n avec chacune de n couleurs (ce qui assure que chaque couleur est utilisée au moins une fois). Les $k-n$ balles restantes peuvent être coloriées avec n couleurs de $f(n,k-n)$ manières. $h(4,7) = f(4,3) = f(3,3) + f(4,2) = f(3,2) + f(2,3) + 10 = 6 + f(1,3) + f(2,2) + 10 = 6 + 1 + 3 + 10 = 20$.

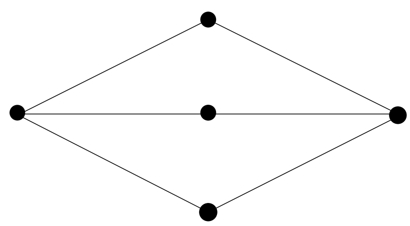
II.- (1) (a) Tout cycle hamiltonien contient au moins trois sommets.

(b) Un cycle hamiltonien contient tous les sommets de G et donc $d(v) \geq 2$ pour tout $v \in V(G)$.

(c) Si G contient un cycle hamiltonien, alors on peut toujours trouver une chaîne reliant deux sommets quelconques de G.

(d) La suppression d'un sommet au cycle hamiltonien laisse tous les autres sommets sur une même chaîne conservant la connexité de G.

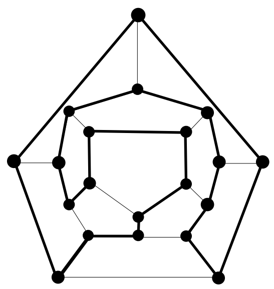
(e) On considère le graphe suivant :

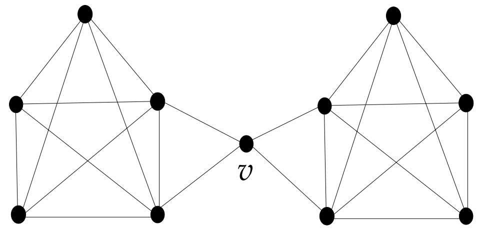


(f) Soit H un cycle hamiltonien d'un graphe G avec $|V(G)| \geq 3$ et soit $S \subseteq V(G)$, $S \neq \emptyset$. On remarque que H doit utiliser un sommet de S pour passer d'une composante connexe de $G \setminus S$ à une autre, (à chaque fois H utilise un sommet différent de S car H est un cycle élémentaire).

Alors le nombre de sommets de S est supérieur ou égal au nombre de composantes connexes de $G \setminus S$.

(g) Le premier graphe est hamiltonien et le deuxième ne l'est pas car il contient un sommet d'articulation, noté par v.





(2) (a) Soit $x \in V(G)$ et soit y un sommet adjacent à x. Comme G est hypohamiltonien alors $G \setminus \{y\}$ est hamiltonien. Alors, $d(x) \geq 2$ dans $G \setminus \{y\}$ et donc $d(x) \geq 3$ dans G.

(b) Soit $v \in V(G)$ et supposons que $d(v) > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Soit $H = \{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1\}$ un cycle hamiltonien dans $G \setminus \{v\}$. Comme $d(v) > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ et par le principe de tiroirs on en déduit que v est adjacent à deux sommets consecutifs de H, disons à v_i et v_{i+1}. Alors, $H' = \{v_1, \ldots, v_i, v, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}, v_1\}$ est un cycle hamiltonien de G, contradiction ! (car G est hypohamiltonien).

(c) D'après les parties (a) et (b), on a $3 \leq d(v) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ pour tout $v \in V(G)$, ce qui implique que $n \geq 7$. De plus, si $n = 7$ alors $d(v) \leq \lfloor \frac{7-1}{2} \rfloor = 3$ pour tout $v \in V(G)$, c'est-à-dire, G est 3-régulier mais $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 7 \cdot 3 = 21$, contradiction ! (car 21 est impair).

(d) Par la symétrie du graphe de Petersen, il suffit de montrer que $G \setminus \{v\}$ est hamiltonien où v est soit un sommet dans le cycle intérieur, soit un sommet dans le cycle extérieur.