Université Pierre et Marie Curie
LM 226 (2005-2006)

GRAPHES ET COMBINATOIRE

Examen de septembre 2006

Durée 2 heures

Calculatrices, documents et portables interdits

Les exercices I et II sont indépendants

Pour tout ensemble E fini, on note $|E|$ le cardinal de E.

Question de cours

Définition d'un arbre. Prouver que le graphe $G = (V,E)$ est un arbre, si et seulement si G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Exercice I

Un poète a écrit 14 poèmes $P_1, \ldots ,P_{14}$, de 10 vers chacun. Dans chacun de ces 14 poèmes, les 10 vers sont distincts.
Le poète cherche à composer un nouveau poème P de 14 vers, dont, pour $1 \leq i \leq 14$, le i–ème vers est un des vers du poème P_i.

1. Combien le poète peut-il composer de tels poèmes P?

2. Deux vers et deux seulement du poème P_{14} se terminent par le mot *destin*. Combien le poète peut–il composer de poèmes P se terminant par le mot *destin*?

3. Dans chacun des 14 poèmes $P_1, \ldots ,P_{14}$, un et un seul vers contient le mot *vie*, de même pour les mots *amour* et *soleil*, deux de ces trois mots n'apparaissant pas dans le même vers.
Combien le poète peut–il composer de poèmes P contenant ces 3 mots?
On pourra utiliser la formule du crible (ou principe d'inclusion–exclusion).

Exercice II

Soit n et p des entiers tels que $n \geq 3$ et $1 \leq p \leq n-1$ et soit $P(n,p) = (V,E)$ le graphe *simple* défini par :

$$\begin{array}{rcl} V & = & \{x_0,\ldots,x_{n-1},y_0,\ldots,y_{n-1}\}, \\ E & = & E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3, \\ E_1 & = & \Big\{\{x_i,x_{i+1}\} \mid 0 \leq i \leq n-1\Big\} \\ E_2 & = & \Big\{\{x_i,y_i\} \mid 0 \leq i \leq n-1\Big\}, \\ E_3 & = & \Big\{\{y_i,y_{i+p}\} \mid 0 \leq i \leq n-1\Big\} \end{array}$$

où $i+1$ dans E_1 et $i+p$ dans E_3 sont des entiers définis modulo n.[1]

1.a. Représenter $P(5,2)$, $P(6,2)$, $P(6,3)$.

1.b. Calculer le degré de tout sommet du graphe $P(n,p)$ (on étudiera, en particulier, le cas : n pair, $p = \frac{n}{2}$). En déduire le cardinal de E.

1.c. Montrer que $P(n,p) = P(n,n-p)$.

1.d. Exhiber un arbre couvrant de $P(n,p)$, ayant n sommets de degré 1.

2. Dans cette question, on note $G = P(4,1)$.

2.a. Représenter G.

2.b. Montrer que, pour tout sommet u de G, il existe exactement trois 2–chaînes de u à u, et il n'existe pas de 3–chaîne de u à u.

2.c. Montrer que si u et v sont deux sommets adjacents de G, il n'existe pas de 2–chaîne de u à v, et il existe exactement sept 3–chaînes de u à v, que l'on citera.

2.d. Montrer que si u et v sont deux sommets distincts, non adjacents de G, soit il existe deux 2–chaînes de u à v et zéro 3–chaîne de u à v, que l'on citera, soit il existe zéro 2–chaîne de u à v et six 3–chaînes de u à v, que l'on citera.

L'utilisation de la matrice d'adjacence, dans la question 2, est possible, mais n'est pas conseillée.

1. Rappel : $\forall i \in \mathbb{Z}$, $i + n = i$ [mod n].