LM226

Examen de septembre 2005

Durée 2 heures

Calculatrices, documents et portables interdits

Exercice I

Soit p un entier strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n\geq p}$ par :

$$\begin{cases} u_p = 0, \\ \forall n \geq p, \quad u_{n+1} = u_n + \binom{n}{p} \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall n \geq p+1,\, u_n = \binom{n}{p+1}.$$

Indication : On pourra introduire la suite $(v_n)_{n\geq p+1}$, définie par :

$$\forall n \geq p+1,\, v_n = u_n - \binom{n}{p+1}$$

et utiliser le triangle de Pascal.

Exercice II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $\mathcal{P}_n$ un ensemble de n points du plan, tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

1. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des droites joignant deux de ces points. Calculer le cardinal α_n de $\mathcal{D}_n$.
Vérifier que $\alpha_{n+1} = \alpha_n + n$.

2. On suppose, de plus, que $\mathcal{P}_n$ est tel que deux droites distinctes de $\mathcal{D}_n$ ne sont pas parallèles et que trois droites distinctes de $\mathcal{D}_n$, non issues d'un même point de $\mathcal{P}_n$, ne sont pas concourrantes.
Dans ce cas, on note β_n le nombre de points d'intersection, autres que ceux de $\mathcal{P}_n$, des droites de $\mathcal{D}_n$.
Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\, \beta_{n+1} = \beta_n + n(\alpha_n - (n-1)).$$

En déduire que

$$\forall n \geq 2,\, \beta_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

Indication : On pourra utiliser l'exercice I en posant :

$$\forall n \geq 2,\, u_n = \frac{\beta_n}{3}.$$

Exercice III

Soit p et k des entiers tels que $1 \leq k \leq p$. On note $G_{p,k}$ le graphe simple dont l'ensemble des sommets est l'ensemble V_p des p–listes de l'ensemble $\{0,1\}$ et où deux sommets sont adjacents, si ce sont des p–listes qui diffèrent par exactement k éléments.

1. Représenter $G_{p,k}$ pour $1 \leq k \leq p \leq 3$.

2. Pour tout couple d'entiers (p,k) tel que $1 \leq k \leq p$,

a. calculer le nombre n de sommets de $G_{p,k}$,

b. montrer que que $G_{p,k}$ est régulier et en déduire le nombre d'arêtes de $G_{p,k}$.

3. On note V'_p (resp. V''_p) l'ensemble des éléments de V_p comportant un nombre impair (resp. pair) de fois le chiffre 1.

a. Montrer que $V'_p \cup V''_p$ est une partition de V_p.

b. Pour tout couple d'entiers (p,k) tel que $1 \leq k \leq p$ et k pair, montrer que $G_{p,k}$ est non connexe. La réciproque de cette propriété est-elle vraie?

c. Pour tout couple d'entiers (p,k) tel que $1 \leq k \leq p$ et k impair, montrer que $G_{p,k}$ est biparti. La réciproque de cette propriété est-elle vraie?

4. Dans toute la suite, p étant toujours un entier strictement positif, on suppose $k = 1$ et on note $G_{p,1} = G_p$.
Soit $u = (u_1, \ldots, u_p)$ et $v = (v_1, \ldots, v_p)$ des sommets de G_p et soit l le nombre d'indices i tels que $u_i \neq v_i$.

a. Construire une l–chaîne d'extrémités u et v. En déduire que G_p est connexe.

Pour tout couple (u,v) de sommets de G_p, on pose alors :

$$D(u,v) = \min \{h \in \mathbb{N} \mid \exists h\text{–chaîne d'extrémités } u \text{ et } v\},$$

et on note :

$$\Delta(G_p) = \max \{D(u,v) \mid (u,v) \in V_p \times V_p\}.$$

b Déduire de la question 4.a que $D(u,v) = l$.

c. En déduire la valeur de $\Delta(G_p)$.

d. Pour u fixé dans V_p et l fixé dans $\mathbb{N}$, calculer le nombre de sommets v de G_p, tels que $D(u,v) = l$.

Corrigé de l'examen de septembre 2005

Exercice I

Pour tout entier $n \geq p+1$, posons :
$$v_n = u_n - \binom{n}{p+1}.$$
Pour tout entier $n \geq p+1$, on a, en utilisant le triangle de Pascal :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - \binom{n+1}{p+1} = u_n + \binom{n}{p} - \binom{n+1}{p+1} = u_n - \binom{n}{p+1} = v_n.$$
La suite $(v_n)_{n \geq p+1}$ est donc constante. On en déduit que :
$$\forall n \geq p+1,\ v_n = v_{p+1} = u_{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = u_p + \binom{p}{p} - \binom{p+1}{p+1} = 0,$$
et que :
$$\forall n \geq p+1,\ u_n = \binom{n}{p+1}.$$

Exercice II

1. Le cardinal de $\mathcal{D}_n$ est le nombre de parties à deux éléments de $\mathcal{P}_n$, d'où :
$$\alpha_n = \binom{n}{2}.$$
En utilisant le triangle de Pascal, on obtient :
$$\alpha_{n+1} = \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \alpha_n + n.$$
Autre solution : Supposons avoir déjà construit les α_n droites de $\mathcal{D}_n$. En rajoutant à $\mathcal{P}_n$ un $(n+1)$–ème point, non aligné avec deux quelconques des points de $\mathcal{P}_n$, on crée n nouvelles droites, d'où $\alpha_{n+1} = \alpha_n + n$.

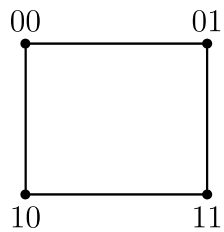
2. Comme précédemment, en rajoutant à $\mathcal{P}_n$ un $(n+1)$–ème point, P_{n+1}, on crée n nouvelles droites. Soit D une de ces droites, déterminée par le point P_{n+1} et un point A de $\mathcal{P}_n$. Le point A appartient à $n-1$ droites de $\mathcal{D}_n$. La droite D coupe donc les α_n droites de $\mathcal{D}_n$ en $\alpha_n - (n-1)$ points autres que ceux de $\mathcal{P}_n$. On en déduit que, pour $n \geq 2$, on a :
$$\beta_{n+1} = \beta_n + n\big(\alpha_n - (n-1)\big) = \beta_n + n\binom{n-1}{2} = \beta_n + \frac{n(n-1)(n-2)}{2},$$
donc
$$\forall n \geq 3,\ \beta_{n+1} = \beta_n + 3\binom{n}{3}.$$
On remarque que $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Donc, en posant : $\forall n \geq 2$, $u_n = \dfrac{\beta_n}{3}$, et en utilisant l'exercice I, on obtient :
$$\forall n \geq 4,\ \frac{\beta_n}{3} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$
et, avec $\beta_2 = \beta_3 = 0$,
$$\forall n \geq 2,\ \beta_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}.$$

Exercice III

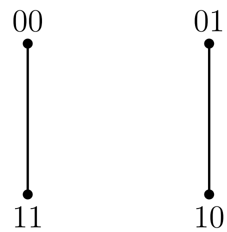
1. Représentations de $G_{p,k}$ pour $1 \leq k \leq p \leq 3$:

$G_{1,1}$:

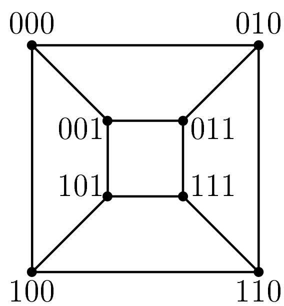
$G_{2,1}$:



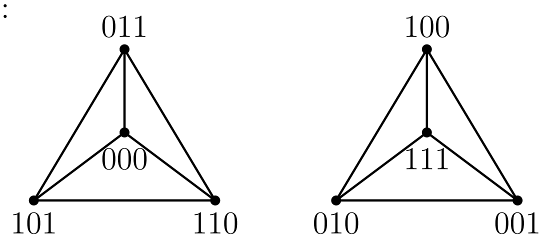
$G_{2,2}$:



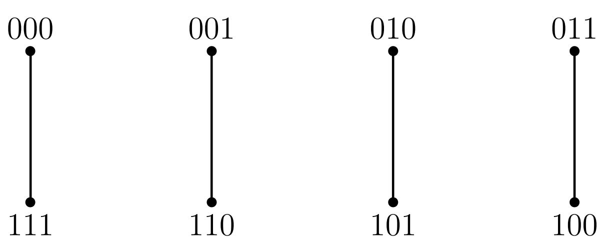
$G_{3,1}$:



$G_{3,2}$:



$G_{3,3}$:



2.a. Le nombre n de sommets de $G_{p,k}$ est le nombre de p–listes de l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$, d'où :

$$n = 2^p.$$

2.b. Soit $u = (u_1, \ldots, u_p)$ un élément de V_p, où, pour $1 \leq i \leq p$, u_i appartient à $\{0,1\}$. Un voisin de u est déterminé par les k éléments de $\{u_1, \ldots, u_p\}$, dont il diffère de u. Le nombre de voisins de u est donc le nombre de parties à k éléments de $\{u_1, \ldots, u_p\}$, qui est égal à $\binom{p}{k}$. On en déduit que $G_{p,k}$ est $\binom{p}{k}$–régulier et et que le nombre d'arêtes de $G_{p,k}$ est

$$m = \frac{1}{2} n \binom{p}{k} = 2^{p-1} \binom{p}{k}.$$

3.a. Le sommet $u = (u_1, \ldots, u_p)$, défini par $u_1 = \cdots = u_p = 0$ appartient à V_p''. Le sommet $v = (v_1, \ldots, v_p)$, défini par $v_1 = 1$ et $\forall i \geq 2$, $u_i = 0$ appartient à V_p'. On en déduit que V_p' et V_p'' sont non vides. De plus, par définition, ces deux ensembles sont disjoints et leur réunion est V_p. On a ainsi prouvé que $V_p' \cup V_p''$ est une partition de V_p.

3.b. Soit $u = (u_1, \ldots, u_p)$ un sommet de V_p' comportant $2q + 1$ fois le chiffre 1. Soit $v = (v_1, \ldots, v_p)$ un sommet adjacent à u. La suite $(v_1, \ldots, v_p)$ est obtenue en changeant k éléments de la suite $(u_1, \ldots, u_p)$: k' fois le chiffre 0 et k'' fois le chiffre 1. Le sommet v comporte donc $2q + 1 + k' - k''$ fois le chiffre 1. On a : $k = k' + k''$. Si k est pair, il en est de même de $k' - k''$, donc v appartient à V_p'. On en déduit qu'il n'existe aucune arête entre un sommet de V_p' et un sommet de V_p'', donc que $G_{p,k}$ n'est pas connexe.
La réciproque de cette propriété est fausse : par exemple, $G_{3,3}$ est non connexe.

3.c. Reprenons le raisonnement précédent avec, cette fois-ci k impair. On a alors $k' - k''$ impair, donc v appartient à V_p''. On montre de même que, si u appartient à V_p'', tout voisin de u appartient à V_p'. On a ainsi prouvé que $G_{p,k}$ est biparti, associé à la partition $V_p' \cup V_p''$ de V_p.
La réciproque de cette propriété est fausse : par exemple, $G_{2,2}$ est biparti.

4.a. Soit $u = (u_1, \ldots, u_p)$ et $v = (v_1, \ldots, v_p)$ deux sommets distincts de G_p, qui diffèrent par exactement l indices : $i_1 < \ldots < i_l$. Construisons successivement les sommets :

$u^0 = u$,
u^1 différant de u par l'élément d'indice i_1,
$\vdots$
u^j différant de u^{j-1} par l'élément d'indice i_j,
$\vdots$
u^l différant de u^{l-1} par l'élément d'indice i_l.

On obtient $u^l = v$, on a ainsi construit une l–chaîne d'extrémités u et v.
On en déduit que pour tout couple (u,v) de sommets de G_p, il existe une chaîne d'extrémités u et v, donc que G_p est connexe.

4.b. La construction précédente montre de plus que, si u et v diffèrent par l chiffres, on a : $D(u,v) \leq l$.
Supposons $D(u,v) = h$, avec $h < l$ et soit $(v^0 = u,v^1,\ldots,v^h = v)$ une h–chaîne de u à v. Chaque élément $v^1,\ldots,v^h$ diffèrerait du précédent par exactement un chiffre, donc u et v diffèreraient par au plus h chiffres, ce qui contredirait l'hypothèse $h < l$.
On a ainsi prouvé que, si u et v diffèrent par exactement l chiffres, $D(u,v) = l$.

4.c. Deux nombres de p chiffres diffèrent par au plus p éléments, on a donc $\Delta(G_p) \leq p$. D'autre part, $(0,\ldots,0)$ et $(1,\ldots,1)$ diffèrent par exactement p chiffres, donc $\Delta(G_p) = p$.

4.d. Soit $u = (u_1,\ldots,u_p)$ fixé dans V et soit l fixé dans $\mathbb{N}$. Le nombre de sommets v de G_p tels que $D(u,v) = l$ est le nombre de parties à l éléments de l'ensemble $\{u_1,\ldots,u_p\}$. Ce nombre est $\binom{p}{l}$, pour $0 \leq l \leq p$, et 0 pour $l > p$.