Université Pierre et Marie Curie
LM 226 (2005-2006)

GRAPHES ET COMBINATOIRE

Corrigé succinct de l'examen de septembre 2006

Exercice I

Notons X l'ensemble des poèmes de 14 vers que le poète peut composer et, pour tout sous-ensemble X' de X, posons : $\overline{X'} = X \setminus X'$.

1. Le nombre d'éléments de l'ensemble X est le nombre d'applications de l'ensemble $\{P_1, \ldots, P_{14}\}$ dans l'ensemble $\{1, \ldots, 10\}$. D'où, $|X| = 10^{14}$.

2. Si les vers v et v' de P_{14} se terminent par le mot *destin*, 10^{13} poèmes se terminent par le vers v et 10^{13} autres poèmes se terminent par le vers v' . On en déduit que $2 \cdot 10^{13}$ poèmes se terminent par le mot *destin*.

3. Notons :
Y l'ensemble des poèmes contenant les trois mots *vie, amour, soleil*,
Z_1 l'ensemble des poèmes ne contenant le mot *vie*,
Z_2 l'ensemble des poèmes ne contenant le mot *amour*,
Z_3 l'ensemble des poèmes ne contenant le mot *soleil*.
On a :

$$Y = \overline{Z_1} \cap \overline{Z_2} \cap \overline{Z_3} = \overline{Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3}.$$

Or

$$|Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3| = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| - |Z_1 \cap Z_2| - |Z_2 \cap Z_3| - |Z_3 \cap Z_1| + |Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3|,$$

avec

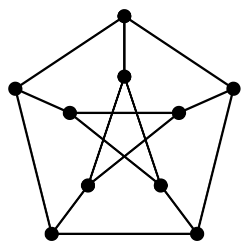
$$|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 9^{14},$$
$$|Z_1 \cap Z_2| = |Z_2 \cap Z_3| = |Z_3 \cap Z_1| = 8^{14},$$
$$|Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3| = 7^{14}.$$

D'où, d'après la formule du crible :

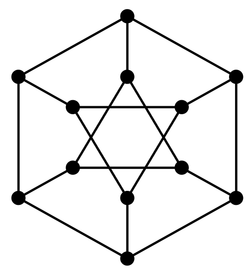
$$|Y| = 10^{14} - 3 \cdot 9^{14} + 3 \cdot 8^{14} - 7^{14}.$$

Exercice II

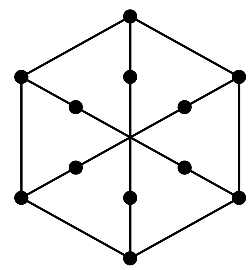
1.a.



$P(5,2)$



$P(6,2)$



$P(6,3)$

On remarque que $P(5,2)$ est le graphe de Petersen.

1.b. Tout sommet x_i de $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ admet trois voisins distincts, x_{i+1}, x_{i-1}, y_i, donc est de degré 3.
Pour $p \neq \dfrac{n}{2}$, tout sommet y_i de $\{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$ admet aussi trois voisins distincts, y_{i+p}, y_{i-p}, x_i, donc est de degré 3.
Pour $p = \dfrac{n}{2}$, on a $i + p = i - p$ [mod n], donc $y_{i+p} = y_{i-p}$. Tout sommet de $\{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$ est alors de degré 2.
On en déduit :

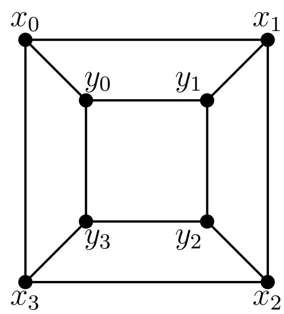
Pour $p \neq \dfrac{n}{2}$, $|E| = \dfrac{3 \cdot 2n}{2} = 3n$.

Pour $p = \dfrac{n}{2}$, $|E| = \dfrac{3n}{2} + \dfrac{2n}{2} = \dfrac{5n}{2} = 5p$.

1.c. Avec les notations du sujet, $P(n,p) = (V,E)$, avec $E = E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3$ et
$$E_3 = \Big\{\{y_i, y_{i+p}\} \mid 0 \leq i \leq n-1\Big\}.$$
Posons alors $P(n, n-p) = (V, E')$, avec $E' = E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3'$ et
$$E_3' = \Big\{\{y_i, y_{i+n-p}\} \mid 0 \leq i \leq n-1\Big\}.$$
Or, en posant $i + p = j$ [mod n], on a,
$$\{y_i, y_{i+p}\} = \{y_{j-p}, y_j\} = \{y_j, y_{j-p}\} = \{y_j, y_{j+n-p}\}.$$
De plus, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ désignant l'ensemble des entiers modulo n, l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ i & \longmapsto & i+p \end{array}$$
est bijective.
On en déduit $E_3' = E_3$ et $P(n, n-p) = P(n,p)$.

1.d. Posons $E' = \Big(E_1 \setminus \{x_{n-1}, x_0\}\Big) \bigcup E_2$. Le graphe $G = (V, E')$ est un arbre couvrant de $P(n,p)$, ayant n sommets de degré 1.

2.a.



$P(4{,}1)$

On remarque que $P(4{,}1)$ est le 3–cube.

2.b. Une 2–chaîne de u à u est du type (u,e,v,e,u). Tout sommet u étant de degré 3, on a trois 2–chaînes de u à u.

Une 3–chaîne de u à u est un triangle. Or, $P(4{,}1)$ n'admet pas de triangle.

2.c. Si, pour u et v adjacents, il existait une 2–chaîne de u à v, le graphe G contiendrait un triangle, ce qui est exclus.

Remarquons que, dans le graphe $G = P(4{,}1)$, les huit sommets jouent le même rôle. Cherchons, par exemple, les 3–chaînes de x_0 à x_1. En considérant successivement les sommets x_1, y_0, x_3, adjacents à x_0, on obtient sept 3–chaînes de x_0 à x_1 :

$$(x_0,x_1,x_0,x_1),(x_0,x_1,y_1,x_1),(x_0,x_1,x_2,x_1),$$

$$(x_0,y_0,y_1,x_1),(x_0,y_0,x_0,x_1),$$

$$(x_0,x_3,x_2,x_1),(x_0,x_3,x_0,x_1).$$

2.d. Un couple de sommets du type (x_0,x_2) est relié par deux 2–chaînes, (x_0,x_1,x_2) et (x_0,x_3,x_2) et zéro 3–chaîne.
Il en est de même pour un couple du type (x_0,y_1).
Un couple de sommets du type (x_0,y_2) est relié par zéro 2–chaîne et six 3–chaînes :

$$(x_0,x_1,x_2,y_2),(x_0,x_1,y_1,y_2),(x_0,x_1,x_2,y_2),$$

$$(x_0,y_0,y_1,y_2),(x_0,y_0,y_3,y_2),(x_0,x_3,x_2,y_2).$$