Université Pierre et Marie Curie
LM 226 (2005-2006)

GRAPHES ET COMBINATOIRE

Commentaires sur l'examen du 29 juin 2006

Voici une analyse des fautes les plus fréquentes.

Question de cours
On énonce :
«Dans un graphe, le nombre des sommets de degré impair est pair.»
On arrête la preuve à :

$$\sum_{i \in I} d(v_i) \text{ est pair,}$$

en notant I l'ensemble des sommets de degré impair.
Il restait à remarquer qu'une somme impaire d'entiers impairs est impaire et qu'une somme paire d'entiers impairs est paire, pour prouver que le cardinal de I est pair.

Exercice I, question 1
Le résultat était donné dans l'énoncé. Beaucoup de candidats font en sorte d'arriver à ce résultat, sans réelle justification ou avec des arguments fantaisistes.

Exercice II, question 1
On a vu souvent affirmer les résultats sans utiliser le fait que G est un arbre, donc connexe, sans cycle (ce qui exclut notamment les boucles, les arêtes multiples, les stables d'ordre supérieur à 1,...).
Remarquons qu'il était possible aussi d'utiliser, dans cette question le fait que $|E| = |V| - 1$.

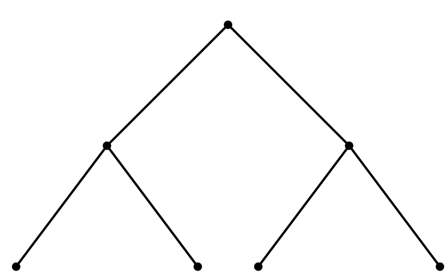
Exercice II, question 3.b
On a vu des exemples, pour des petites valeurs de k, rarement pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice II, question 4.a
Beaucoup de candidats affirment le résultat sans le justifier.

Exercice II, question 6.a
Il n'est pas évident que $\Delta \in \{1,2\}$ implique que G est un chaîne. Ce n'était pas l'objet de cette question, mais de la question suivante.

Raisonnements par récurrence

Beaucoup de candidats en abusent. De plus, ces raisonnements sont, la plupart du temps, incorrects :
Soit $\mathcal{F}$ une famille de graphes. On cherche à prouver que tout graphe de la famille $\mathcal{F}$ possède une propriété $\mathcal{P}$.
On note $\mathcal{H}_n$ la propriété suivante :
Tout graphe, d'ordre n, de la famille $\mathcal{F}$ possède la propriété $\mathcal{P}$.
On vérifie $\mathcal{H}_1$ et on montre : $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$.
Le principe de récurrence prouve alors que la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
Pour prouver $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$, on a vu, très souvent, un raisonnement du type suivant :
On suppose que tout graphe G, d'ordre n, de la famille $\mathcal{F}$ possède la propriété $\mathcal{H}_n$. A un tel graphe, on *rajoute* un sommet et des arêtes incidentes à ce sommet, de manière que le graphe obtenu appartienne à la famille $\mathcal{F}$. Puis on montre que le graphe G' obtenu possède la propriété $\mathcal{H}_{n+1}$.
Ce raisonnement est faux, car on n'est pas sûr que tout graphe, d'ordre $n+1$, de la famille $\mathcal{F}$ soit obtenu en *rajoutant* un sommet (et des arêtes incidentes) à un graphe d'ordre n de $\mathcal{F}$, même si certains se donnent bonne conscience, en envisageant plusieurs cas.
Par exemple, soit $\mathcal{F}$, la famille des arbres contenant exactement un sommet de degré 2 et de degré maximum 3. Le graphe d'ordre 7 suivant appartient à la famille $\mathcal{F}$, mais ne peut pas être obtenu en rajoutant un sommet à un graphe d'ordre 6 de la famille $\mathcal{F}$.



Le raisonnement à faire est le suivant:
On se donne un un graphe quelconque G' de la famille $\mathcal{F}$, d'ordre $n+1$. On *supprime* un sommet de ce graphe, en le choisissant de manière à ce que le graphe obtenu ait la propriété $\mathcal{H}_n$. Puis on essaie de prouver que le graphe G' possède la propriété $\mathcal{H}_{n+1}$.