UNIVERSITÉ PARIS VI — Année 2004-2005

L2 MATH 223, 6 juin 2005

(1) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un espace euclidien.

(2) (i) Trouver un changement de coordonnées qui diagonalise la forme quadratique

$$q : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad q(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 6x_3^2 - 2x_4^2.$$

(ii) Déterminer la forme polaire de q (= la forme bilinéaire symétrique associée à q).

(iii) Déterminer le rang de q.

(iv) Déterminer la signature de q.

(v) Déterminer le noyau de q.

(3) (i) Montrer que les matrices suivantes appartiennent à $O(2)$:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Décrire géométriquement les isométries de $\mathbf{R}^2$ définies par A et B.

(4) Appliquer la méthode de Gram-Schmidt aux éléments $1, x, x^2$ de l'espace

$$V = \{\text{polynômes à une variable à coefficients réels}\}$$

muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 x f(x) g(x)\, dx.$$

Expliquer pourquoi cette formule définit un produit scalaire sur V.

(5) Soit M la matrice à coefficients complexes

$$M = \begin{pmatrix} -i/3 & -2/3 & a \\ 2/3 & (3+i)/6 & b \\ -2/3 & (3-i)/6 & c \end{pmatrix},$$

où a est supposé réel positive.

(i) Déterminer a, b, c pour que la matrice M soit unitaire.

(ii) Quelles sont les valeurs propres de M?

Université Pierre et Marie Curie **Année 2004-2005**
LM 223 Formes quadratiques

Examen de Septembre

Question de cours
Soit E un espace vectoriel sur C(de dimension finie)de base B .
1°) Donner la définition d'une forme hermitienne f sur E .
Soit M la matrice de f par rapport à la base **B .**
2°) Quelle est la propriété fondamentale de M ?
3°) Soit B' une autre base de E et soit P la matrice de passage de la base B à la base B' .Quelle est la matrice M' de f dans la base B' ?

Exercice 1
Soit $E = R^4$ espace vectoriel réel de base B =(e_i) i = 1,2, 3 ,4, et soit q la forme quadratique de E définie par $q(X) = xy + yz + zt + tx$ si x,y,z,t sont les composantes de X sur la base B .
a) Donner la matrice de f, forme polaire de q .
b) Déterminer le rang et la signature de f . Quel est le noyau de f ?

Exercice 2
Soit q une forme quadratique de R^3 définie par
$q(X) = x^2 - 8xy - 16xz + 7y^2 - 8yz + z^2$ si X est de composantes x,y,z dans la base canonique B de R^3
a) Ecrire la matrice A de q dans la base B .
b) Quelles sont les valeurs propres de A ?
c) Trouver une isométrie de R^3 qui diagonalise q .

Exercice 3

Soit g une isométrie de R^3 , distincte de $\pm$ Id .
1°) Que peut-on dire des valeurs propres complexes de g si
a) g est une rotation ;
b) g est une symétrie orthogonale ;
c) g n'est ni une rotation, ni une symétrie orthogonale ;
[En particulier ,préciser le nombre de valeurs propres réelles de g]

2°) Donner au moins un exemple de chacun des cas a) , b), c) .