Licence, Deuxième année, LM216
Examen du 24 janvier 2006

Les documents et calculatrices sont interdits

EXERCICE 1– Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = (u,v) = (x+y, x-y)$.
1) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa jacobienne en tout point. Montrer que φ est un difféomorphisme.
2) On pose $U = \{(x,y), x^2 > y^2\}$. On suppose que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \ , \qquad (*)$$

et l'on pose $F = f \circ \varphi^{-1}$. Montrer que F vérifie l'équation:

$$4\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\sqrt{uv}} \ .$$

3) En déduire que:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{v}{u}}\right) \ ,$$

où $\varepsilon = 1$ si $u > 0$ et $\varepsilon = -1$ sinon.
4) Montrer que F est de la forme:

$$F(u,v) = A(u) + B(v) + \sqrt{uv} \ ,$$

où A et B sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les solutions de $(*)$?

EXERCICE 2– On pose $f(x,y) = \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$. Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}^2$ et le calculer.

EXERCICE 3– Soit D le domaine compris entre les courbes $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$ et $xy^3 = 15$, et $x, y \geq 0$. Calculer l'aire de D. On pourra effectuer le changement de variables $xy = u$, $xy^3 = v$ (on justifiera que ce choix est licite).

EXERCICE 4– Soit $D = \{(x,y), 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.
1) Donner une paramétrisation du bord de D dans le sens direct.
2) Calculer $I = \iint_D y dx dy$.
3) On pose $\omega = (16x - 8y^2)dx - 8xydy$. Calculer $d\omega$.
4) Calculer $J = \int_{\partial D} \omega$.