

UNITE D'ENSEIGNEMENT LM 216

EPREUVE ECRITE**Lundi 17 janvier 2005 – Durée 2h****Les deux exercices sont indépendants**

Exercice 1 – On considère la courbe Γ définie par l'équation implicite $x^3 + 2xy^2 = 1$ et on se propose de déterminer la distance μ du point $O = (0, 0)$ à Γ - c'est-à-dire le minimum de OM pour M parcourant Γ par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

1. On considère la fonction $F : (x, y, u) \mapsto x^2 + y^2 + u(x^3 + 2xy^2 - 1)$. Déterminer ses points critiques

2. Déterminer la distance de O à Γ .

3. a. Montrer que l'équation $x^3 + 2xy^2 = 1$ peut, au voisinage de $(1, 0)$ se résoudre sous la forme $x = h(y)$ où h est une fonction paire telle que $h(0) = 1$

b. Donner le développement limité à l'ordre 2 de h en 0.

c. Montrer que le point $(1, 0)$ est un maximum relatif de la fonction $f : x, y \mapsto x^2 + y^2$ relativement à la condition $x^3 + 2xy^2 = 1$.

Exercice 2 - Soit $R > 0$. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble K des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 \leq 4$ et $y \geq \sqrt{x^2 + 1}$.

1. a. Représenter schématiquement cet ensemble et dire pourquoi il est quarrable

b. Déterminer l'intersection de K avec la parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée y

c. Calculer l'aire A de K en utilisant les intersections de K avec les parallèles à l'axe des abscisses

On donne les primitives suivantes

$$\int \sqrt{y^2 - 1} dy = \frac{y\sqrt{y^2 - 1}}{2} - \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\int \sqrt{4 - y^2} dx = \frac{y\sqrt{4 - y^2}}{2} + 2 \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$$

2. a. On note Θ l'ensemble des points $(r \cos s, r \sin s)$ pour $r \in [0, 2]$ et

$$s \in \left[\arccos \sqrt{\frac{3}{8}}, \pi - \arccos \sqrt{\frac{3}{8}} \right]$$

Décrire géométriquement Θ et montrer que c'est aussi le sous-ensemble du disque D de

centre O et de rayon 2 des points (x, y) tels que $y \geq \sqrt{\frac{5}{3}}|x|$

b. Dédurre de la question précédente que $K \subset \Theta$ et que $(r \cos s, r \sin s) \in K$ si et seulement si

$$r \in \left[\sqrt{-\frac{1}{\cos 2s}}, 2 \right].$$

c. Retrouver l'aire de K à partir de la description de K donnée en b. Indications :

coordonnées polaires.... On pourra prendre la primitive $\int \frac{ds}{\cos 2s} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 + \sin 2s}{1 - \sin 2s} \right)$

Corrigé de l'épreuve écrite**Lundi 17 janvier 2005 – Durée 2h****Les deux exercices sont indépendants**

Exercice 1 -1 On a $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + u(3x^2 + 2y^2)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4uxy$, $\frac{\partial F}{\partial u} = x^3 + 2xy^2 - 1$

Les points critiques sont les solutions du système obtenu en annulant ces trois dérivées partielles. De $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ on déduit $y = 0$ ou $1 + 2ux = 0$.

Cas $y = 0$ - On obtient alors les deux autres équations $x^3 = 1$, c'est-à-dire $x = 1$ (on opère avec des nombres réels) et $2x + 3ux^2 = 0$ ou $u = -\frac{2}{3}$ - D'où le premier point critique

$$\left(1, 0, -\frac{2}{3}\right)$$

Cas $1 + 2ux = 0$ - On a $u = -\frac{1}{2x}$ puis $2x - \frac{1}{2x}(3x^2 + 2y^2) = \frac{x}{2} - \frac{y^2}{2} = 0$ soit $x^2 = 2y^2$, et enfin

$$2x^3 = 1 \text{ soit } x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \text{ Ce qui donne les deux points critiques } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2^{5/6}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{1}{2^{5/6}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2^{5/6}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right).$$

2. Le carré μ^2 est le minimum de $OM_{x,y}^2 = x^2 + y^2$ pour $M_{x,y}$ parcourant Γ . Si ce minimum est atteint pour (x_0, y_0) on sait qu'il existe un u_0 tel que (x_0, y_0, u_0) soit un point critique de la fonction F de la question 1. Pour obtenir le minimum il suffit de calculer les valeurs de OM^2 pour chacun des trois points critiques obtenus plus haut.

Point $\left(1, 0, -\frac{2}{3}\right)$: on a $OM^2 = 1$

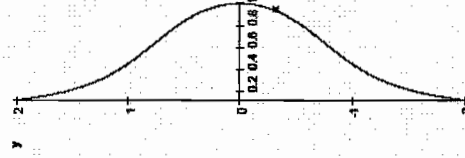
Point $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2^{5/6}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$: on a $OM^2 = \frac{1}{2^{2/3}} + \frac{1}{2^{5/3}} = \frac{3}{2^{5/3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{32}}$

Le troisième point critique donne la même valeur (on peut noter que Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses).

La distance est donc atteinte en $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2^{5/6}}\right)$ et en son symétrique $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{1}{2^{5/6}}\right)$. Elle est

égale à $\left(\frac{27}{32}\right)^{1/6} = 0,97208\dots$

A la machine on obtient le tracé suivant pour Γ (en axes orthonormés)



- 3. a.** On a $\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2xy^2)_{x=1, y=0} = (3x^2 + 2y^2)_{x=1, y=0} = 3$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe un rectangle $R =]1 - \delta, 1 + \delta[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que l'intersection $\Gamma \cap R$ soit l'ensemble des points $(h(y), y)$ pour $y \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, où h est une fonction définie dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$. L'ensemble Γ et l'ensemble R sont invariants par la transformation $y \mapsto -y$. Il en résulte que $(h(y), -y)$ est de la forme $(h(z), z)$, c'est-à-dire que $h(-y) = h(y)$.
- b.** Comme h est une fonction paire son développement limité est de la forme $h(y) = 1 + ay^2 + \eta(y)y^2$ - avec $\lim_0 \eta = 0$.

Par définition de h on a $h'(y) + 2h(y)y^2 = 1$. En développant et en ne gardant que les termes

$$1 + 3\alpha y^2 + \eta_2(y)y^2 + 2(1 + \alpha y^2 + y^2\eta(y))y^2 = 1$$

de degré au plus 2 en y il vient

$$1 + (3\alpha + 2)y^2 + \eta_2(y)y^2 = 1$$

où les η sont de limite nulle en 0. D'où l'on déduit que $\alpha = -\frac{2}{3}$.

c. Les éléments de Γ voisins de $(1,0)$ sont de la forme $(h(y), y)$ pour $y \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Or

$$f(h(y), y) = (1 - \frac{2}{3}y^2 + \eta(y)y^2)^2 + y^2 = 1 + (1 - \frac{4}{3})y^2 + \eta_4(y)y^2$$

$$f(h(y), y) = 1 - \frac{y^2}{3} + y^2\eta_4(y)$$

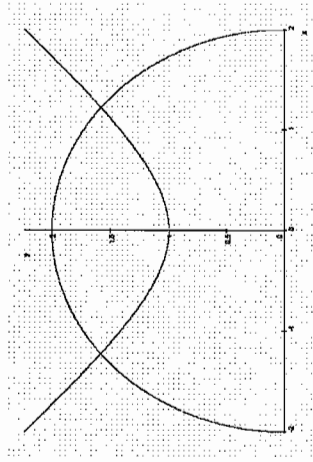
où $\lim_{y \rightarrow 0} \eta_4 = 0$.

On a donc $f(x, y) < f(1, 0)$ pour les points voisins de $(1, 0)$ et distincts de $(1, 0)$. Ce qui montre que $(1, 0)$ est un maximum relatif de f sur Γ

Exercice 2 - 1. a. L'ensemble K est l'ensemble des points (x, y) tels que

$$\sqrt{1+x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \quad (\text{pour } x \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]) \text{ et les deux fonctions } x \mapsto \sqrt{1+x^2} \text{ et}$$

$$x \mapsto \sqrt{4-x^2} \text{ sont continûment dérivables sur } x \in]-2, 2[.$$



b. Les deux courbes qui limitent K sont les courbes représentatives des fonctions

$x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ et $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$. Elles se coupent en deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, d'abscisses $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'ordonnée $\sqrt{\frac{5}{2}}$. Pour $1 \leq y \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$ l'ensemble

K_y est l'intervalle $[-\sqrt{y^2-1}, \sqrt{y^2-1}]$; pour $\frac{\sqrt{5}}{2} \leq y \leq 2$ on obtient l'intervalle $[-\sqrt{4-y^2}, \sqrt{4-y^2}]$.

c. On a $A = 2(\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^2 \sqrt{y^2-1} dy + \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^2 \sqrt{4-y^2} dy)$. Avec les primitives indiquées on obtient

$$\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^2 \sqrt{1+y^2} dy = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{2} \ln(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}})$$

$$\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^2 \sqrt{4-y^2} dy = \pi - \frac{\sqrt{15}}{4} - 2 \arcsin(\frac{\sqrt{5}}{8})$$

$$\text{et finalement } A = 2\pi - \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) - 4 \arcsin \sqrt{\frac{5}{8}}$$

2. a. Cet ensemble Θ est un secteur circulaire du disque de centre O et de rayon 2

d'ouverture $\pi - 2 \arccos \sqrt{\frac{3}{8}}$. Soit le point $(r \cos s, r \sin s)$ pour $r \in [0, 2]$ et

$$s \in \left[\arccos \sqrt{\frac{3}{8}}, \pi - \arccos \sqrt{\frac{3}{8}} \right]. \text{ On a } r \sin s \geq \sqrt{\frac{5}{3}} |\cos s| \text{ puisque } \sin s \geq \sqrt{\frac{5}{8}} \text{ et } |\cos s| \leq \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\text{pour } s \in \left[\arccos \sqrt{\frac{3}{8}}, \pi - \arccos \sqrt{\frac{3}{8}} \right].$$

Réciproquement soit (x, y) un point du disque tel que $y \geq \sqrt{\frac{5}{3}} |x|$. On peut alors écrire

$$(x, y) = (r \cos s, r \sin s) \text{ et } \sin s \geq \sqrt{\frac{5}{3}} |\cos s|. \text{ Comme } \sin s \geq 0 \text{ on a } s \in [0, \pi]. \text{ On a d'autre}$$

part $\frac{5}{3} \cos^2 s + \cos^2 s \leq \sin^2 s + \cos^2 s = 1$ soit $\cos^2 s \leq \frac{3}{8}$. Les deux conditions $s \in [0, \pi]$ et

$$\cos^2 s \leq \frac{3}{8} \text{ se résolvent en } s \in \left[\arccos \sqrt{\frac{3}{8}}, \pi - \arccos \sqrt{\frac{3}{8}} \right].$$

b. L'ensemble K est l'ensemble des (x, y) tels que $x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right]$ et $y \in \left[\sqrt{1+x^2}, \sqrt{4-x^2} \right]$.

Il s'agit de vérifier que $y \geq \sqrt{\frac{5}{3}}|x|$ soit $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{\frac{5}{3}}|x|$. Ce qui équivaut à $1+x^2 \geq \frac{5}{3}x^2$ ou

$$\frac{2}{3}x^2 \leq 1, \text{ ce qui est une conséquence de } x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$$

On a aussi $(r \cos s, r \sin s) \in K$ si et seulement si $1+r^2 \cos^2 s \leq r^2 \sin^2 s$ et $r \leq 2$. On a donc

$$1+2r^2 \cos^2 s \leq r^2 \text{ et enfin } r^2(1-2\cos^2 s) \geq 1 \text{ ou } r^2(-\cos 2s) \geq 1. \text{ Comme}$$

$$s \in \left[\arccos \sqrt{\frac{3}{8}}, \pi - \arccos \sqrt{\frac{3}{8}} \right] \text{ on a } \cos s \in \left[-\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}} \right], \cos^2 s \in \left[0, \frac{3}{8} \right] \text{ et}$$

$$\cos 2s = 2\cos^2 s - 1 \in \left[-1, -\frac{1}{4} \right]; \text{ en particulier } \cos 2s < 0 \text{ d'où } r \geq \sqrt{\frac{1}{\cos 2s}}.$$

c. Posons $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{3}{8}}$. On a $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{8}}$. Comme $\sqrt{\frac{3}{8}}$ on a $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ et

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{5}{8}}$. La formule de calcul de aires en coordonnées polaires donne

$$\text{aire}(K) = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \int_{\sqrt{\frac{1}{\cos 2s}}}^2 r dr ds = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} r^2 ds = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \left(2 + \frac{1}{2 \cos 2s} \right) ds$$

$$\text{aire}(K) = 2\pi - 4\alpha + \frac{1}{8} \ln \frac{1 + \sin(2\pi - 2\alpha)}{1 - \sin(2\pi - 2\alpha)} - \frac{1}{8} \ln \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$$

$$\text{aire}(K) = 2\pi - 4\alpha - \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin(2\alpha)}{1 - \sin(2\alpha)}. \text{ Or } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sqrt{\frac{5}{8}} \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ d'où}$$

$$\ln \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \ln \frac{4 + \sqrt{15}}{4 - \sqrt{15}} = 2 \ln(4 + \sqrt{15}) \text{ car } \frac{1}{4 - \sqrt{15}} = 4 + \sqrt{15} \text{ Or } \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 = 4 + \sqrt{15}$$

D'où finalement $\text{aire}(K) = 2\pi - 4\alpha - \ln \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$. On retrouve le résultat de 1.c si l'on

$$\text{note que } \alpha = \arccos \sqrt{\frac{3}{8}} = \arcsin \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

EXAMEN DU 6 JUIN 2005 : 8H30-10H30

*L'usage des documents et des calculatrices n'est pas autorisé.
Les deux problèmes sont indépendants.*

PROBLÈME I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 y^3 (1 + x + y)$

1. a. Démontrer que toutes les dérivées partielles de f sont nulles à partir d'un certain rang; en déduire que f est de classe C^∞ .

1.b. Calculer explicitement les dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

1.c. Déterminer les points critiques (ou singuliers) de la fonction f .

2. Démontrer que le point $A(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ est un extremum ; est-ce un maximum ou un minimum?

3. Est-ce que les points suivants sont des i) maxima, ii) minima, iii) ni l'un ni l'autre:

a) $B(0,2)$ b) $C(-\frac{1}{2},0)$

c) $D(0,b)$ avec $b \neq 0, b \neq -1, b \neq 2$ d) $E(a,0)$ avec $a \neq 0, a \neq -1, a \neq -\frac{1}{2}$

e) $F(0,-1)$ f) $G(-1,0)$ h) $H(0,0)$.

PROBLÈME II

On pose $P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}, \omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

On considère le bord du losange $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| = 1\}$ orienté dans le sens

direct (ou positif) et paramétré par:

$$\gamma = \begin{cases} (x, y) = (1 - t, t), 0 \leq t \leq 1 \\ (x, y) = (1 - t, 2 - t), 1 \leq t \leq 2 \\ (x, y) = (t - 3, 2 - t), 2 \leq t \leq 3 \\ (x, y) = (t - 3, t - 4), 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| < 1\}$

Tournez la page S.V.P.

1.a. Calculer $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$.

1.b. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_\gamma \omega$.

(Pour simplifier les calculs, remarquer et justifier que les intégrales sur les quatre côtés du losange sont égales)

1.c. Peut-on appliquer la formule de Green-Riemann au domaine D ?

2. On pose $P_1(x,y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}(x \sin y - y \cos y)$ et $Q_1(x,y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}(x \cos y + y \sin y)$

$P_2 = P_1 + P, Q_2 = Q_1 + Q$ avec $P_2(0,0) = 0$ et $Q_2(0,0) = 1$.

2.a. Démontrer que P_1 n'est pas de classe C^1 dans D_1 .

On admet que P_2 et Q_2 sont de classe C^1 dans D .

2.b. Calculer $\frac{\partial Q_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P_2}{\partial y}(x,y)$.

2.c. En déduire $I = \int_\gamma P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy$.

2.d. Justifier l'affirmation: P_2 et Q_2 sont de classe C^1 dans D .

P I 1.a. Toute dérivée partielle d'un polynôme de degré au plus n est de degré au plus $n-1$. Il résulte de là que toute dérivée partielle d'ordre $n+1$ d'un polynôme de degré au plus n est de degré au plus -1 donc nulle. D'autre part tout polynôme est C^∞ pour la même raison. Ici le polynôme est de degré 6. Donc toute dérivée partielle d'ordre 7 du polynôme est nulle.

$$1.b \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 3x^2y^3 + 2xy^4 = xy^3(2 + 3x + 2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 = x^2y^2(3 + 3x + 4y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 + 6xy^3 + 2y^4 = y^3(2 + 6x + 2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y + 6x^3y + 12x^2y^2 = x^2y(6 + 6x + 12y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 + 9x^2y^2 + 8xy^3 = xy^2(6 + 9x + 8y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 + 9x^2y^2 + 8xy^3 = xy^2(6 + 9x + 8y)$$

$$1.c. \text{ L'ensemble des pts critiques est } \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \right\} = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{2+3x+2y=0\}$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\} = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{3+3x+4y=0\}$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \right\} \cap \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\} = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{2+3x+2y=0\}$$

$$3+3x+4y=0$$

$$\{2+3x+2y=3+3x+4y=0\} = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$\text{Ens des pts critiques} = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \left\{ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

PI 1.d. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{9}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$ (2)

$$(f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2)(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{72} - \frac{1}{144} > 0$$

$f_{xx}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}) > 0$ $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ est un minimum local

PI 3 a (0,2) $f(x,y) = x^2(y^3(1+x+y))$. Dans une boule B_1 assez petite de centre (0,2) en (0,2), $y^3(1+x+y)$ a le signe de $8(1+2) = 24$. Donc est positif. Donc f est ≥ 0 dans B_1 minimum local

3 b $(-\frac{1}{2}, 0)$ $f(x,y) = y^3[x^2(1+x+y)]$ Dans une boule B_2 assez petite de centre $(-\frac{1}{2}, 0)$, $x^2(1+x+y)$ a le signe de $\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ donc > 0 . Comme y^3 change de signe dans toute boule de centre $(-\frac{1}{2}, 0)$ il en est de même de f . Ni l'un ni l'autre

3 c (0,b) $f(x,y) = [y^3(1+x+y)]x^2$ Dans une boule B_3 de centre (0,b) assez petite $y^3(1+x+y)$ a le signe de $b^3(1+b)$. Donc est > 0 si $b^3(1+b) > 0$ et < 0 si $b^3(1+b) < 0$.

minimum local si $b^3(1+b) > 0$ maximum local si $b^3(1+b) < 0$

3 d (a,0) $f(x,y) = y^3[x^2(1+x+y)]$ Dans une boule B_4 de centre (a,0) $[x^2(1+x+y)]$ a le signe de $a^2(1+a)$. Comme y^3 change de signe dans toute boule de centre (a,0), il en est de même de f . Ni l'un ni l'autre

3 e (0,-1) Dans toute boule de centre (0,-1) $y^3(1+x+y)$ change de signe. Il en est de même de f . Ni l'un ni l'autre

3 f (-1,0) Dans toute boule de centre (-1,0) $y^3(1+x+y)$ change de signe. Il en est de même de f . Ni l'un ni l'autre

3 h (0,0). Dans une boule assez petite B_5 de centre (0,0) $1+x+y$ a le signe de 1 donc est positif. Dans boule

(3)

de centre $(0,0)$ $x^2 y^3$ change de signe. Il en est de même de f . Ni l'un ni l'autre

$$DII \quad 1a \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ en.}$$

$$\text{tout } (x,y) \neq (0,0)$$

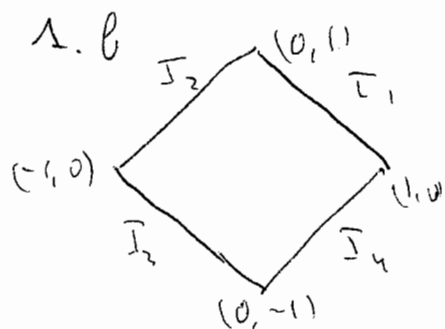
$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2+y^2} \right) = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ dans tout}$$

$$(x,y) \neq (0,0).$$

$$\text{Donc pour tout } (x,y) \neq (0,0) \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

elle se prolonge donc par continuité en $(0,0)$ si on

lui donne la valeur. On peut donc intégrer $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ est sa valeur est 0.



$$I_1 = - \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^2 + t^2}$$

$$I_2 = - \int_1^2 \frac{dt}{(2-t)^2 + (1-t)^2}$$

$$I_3 = - \int_2^3 \frac{dt}{(3-t)^2 + (2-t)^2}$$

$$I_4 = \int_3^4 \frac{dt}{(-t)^2 + (3-t)^2}$$

Le changement de variables $t \rightarrow t-1$ sur $t-2$, $t-3$ dans I_1 change celle-ci en I_2 , I_3 , I_4 respectivement

Donc $I_1 = I_2 \neq I_3 = I_4$

$$I_1 = - \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^2 + t^2} = - \int_0^1 \frac{2dt}{(2t-1)^2 + 1} = - \int_{-1}^{+1} \frac{du}{u^2 + 1}$$

$$I_1 = \arctg(-1) - \arctg(+1) = -\frac{\pi}{2} \quad u = 2t-1$$

$$\int_{\gamma} \omega = -2\pi$$

1.c On ne peut pas appliquer Green-Riemann parce que les dérivées premières de P et Q ne sont pas bornées et continues sur $D = \{ (0,0) \}$ ne sont pas bornées au voisinage de $(0,0)$

P II 2a. $P_1 = \frac{-e^x y \cos y}{x^2 + y^2} + \frac{e^x x \sin y}{x^2 + y^2}$. Comme $|x \sin y| \leq |x||y|$

$\frac{e^x x \sin y}{x^2 + y^2}$ est bornée au voisinage de $(0,0)$.

D'autre part $P_1(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = -(e^{1/n} \cos \frac{1}{n}) \frac{n}{2} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ car $e^{1/n} \rightarrow 1$ et $\cos \frac{1}{n} \rightarrow 1$. Donc P_1 n'est pas continue en $(0,0)$.

2b. $\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x} = \frac{e^x (x \cos y + y \sin y + \cos y)}{x^2 + y^2} + \frac{2x e^x (x \cos y + y \sin y)}{(x^2 + y^2)^2}$

$\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x} = \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} \left\{ \cos y [(x^2 + y^2)x + x^2 + y^2 - 2x^2] + \sin y [y(x^2 + y^2) - 2xy] \right\}$
 $y^2 - x^2$

pour tout $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = \frac{e^x (x \cos y + y \sin y - \cos y)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y e^x (x \sin y - y \cos y)}{(x^2 + y^2)^2}$

$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} \left\{ \cos y \left[\frac{x^2 + y^2}{x} - \frac{x^2 - y^2}{y^2 - x^2} + 2y^2 \right] + \sin y [y(x^2 + y^2) - 2xy] \right\}$

pour tout $(x,y) \neq (0,0)$

Donc $\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = 0$ et aussi $\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}(x,y)$

$= 0$ en tout $(x,y) \neq 0$. Comme plus haut on peut prolonger $\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}(x,y)$ à tout D d'une manière continue

ni on lui assigne la valeur 0 en $(0,0)$.

Donc $\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}$ est intégrable sur D et son intégrale est nulle.

2c. On peut appliquer G-R $P_2 dx + Q_2 dy$ sur D

car P_2, Q_2 sont C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\int P_2 dx + Q_2 dy =$

$\iint_D \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) dx dy = 0$

Pl II 2 d $P_2 = \frac{e^x(x \sin y - y \cos y) - y}{x^2 + y^2}$ $Q_2 = \frac{e^x(x \cos y + y \sin y) - x}{x^2 + y^2}$

$\sin y = y + y^3 r_1(y)$, $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + y^4 r_2(y)$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 r_3(x)$
 où r_1, r_2, r_3 sont des fonctions C^1 (et même C^∞) telles que
 si $y \neq 0$ $r_1(y) = \frac{1}{y^3} (\sin y - y)$ $r_2(y) = \frac{1}{y^4} (\cos y - 1 + \frac{y^2}{2})$ et si $x \neq 0$
 $r_3(x) = \frac{1}{x^3} (e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2})$

$x \sin y - y \cos y = -y + xy + \frac{y^3}{2} + xy^3 r_1(y) + y^5 r_2(y)$
 $e^x(x \sin y - y \cos y) = -y + xy + \frac{y^3}{2} + xy^3 e^x r_1(y) + y^5 e^x r_2(y)$

où :

$p(x,y) = \frac{xy^3}{2} + x^3 y (\frac{1}{2} - r_3(x) \cos y) + xy^3 e^x r_1(y) + x^4 r_3(x) \sin y + \frac{x^2 y^3}{4}$
 $+ y^5 e^x r_2(y)$

$e^x(x \sin y - y \cos y) = -y + \frac{x^2 y + y^3}{2} + p(x,y)$

$P_2(x,y) = \frac{y}{2} + \frac{p(x,y)}{x^2 + y^2}$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$

p est de la forme $\sum_{\alpha+\beta \geq 4} x^\alpha y^\beta p_{\alpha\beta}(x,y)$ où les fonctions $p_{\alpha\beta}$ sont C^1 (et même C^∞)

De plus, les fonctions $h_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par
 $h_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h_{\alpha\beta}(0,0) = 0$

Si on montre que les fonctions $h_{\alpha\beta}$ sont C^1 alors
 l'extension de P_2 à $\mathbb{R}^2$ obtenue en posant $P_2(0,0) = 0$
 sera C^1 et égale à $\frac{y}{2} + \sum_{\alpha+\beta \geq 4} h_{\alpha\beta}(x,y) p_{\alpha\beta}(x,y)$

Sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $h_{\alpha\beta} = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$ et donc $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\beta (x^2 + y^2) - 2x^{\alpha+1} y^\beta}{(x^2 + y^2)^2}$

Comme le numérateur est homogène de degré au moins

6

5 ($\alpha + \beta \geq 4$). $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x} (x, y) \rightarrow 0$ quand $(x, y) \rightarrow 0$
 De même $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial y} (x, y) = \frac{(\beta y^{\beta-1} (x^2 + y^2) - 2y^{\beta+1})}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial y} (x, y) \rightarrow 0$

quand $(x, y) \rightarrow 0$.

Finalement en 0 $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x} (0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_{\alpha\beta}(x, 0)}{x}$.

Mais $\frac{h_{\alpha\beta}(x, 0)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \geq 1 \\ -x^{\alpha-3} & \text{si } \beta = 0. \end{cases}$ Mais alors $\alpha \geq 4$ et $\alpha - 3 \geq 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_{\alpha\beta}(x, 0)}{x} = 0$.

De même $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial y} (0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{h_{\alpha\beta}(0, y)}{y}$ et on a :

$h_{\alpha\beta}(0, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq 1 \\ y^{\beta-3} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$ mais alors $\beta \geq 4$ et $\beta - 3 \geq 1$

Donc dans tous les cas $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{h_{\alpha\beta}(0, y)}{y} = 0$.

Ceci achève la preuve du fait que P_2 est C^1

Pour Q_2 un calcul analogue montre que $\pi(x, y) \neq (0, 0)$

$Q_2 = 1 + \frac{x}{2} + \frac{X}{x^2 + y^2}$ où X est une fonction de la

forme $X = \sum_{\alpha+\beta \geq 4} x^\alpha y^\beta X_{\alpha\beta}(x, y)$ où les $X_{\alpha\beta}$ sont C^1 (et

même C^∞) et on peut reprendre les raisonnements ci

dessus

Licence, Deuxième année, LM216
Épreuve de Mathématiques du 16 septembre 2005
Durée 2 heures

L'usage des documents et des calculatrices n'est pas autorisé.

EXERCICE 1— Soit D le domaine défini par $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

a) Effectuer le changement de variables $x = r \cdot \cos \theta$, $y = \frac{r}{2} \cdot \sin \theta$, et calculer

$$I = \int \int_D (x^2 - y^2) dx dy .$$

b) Calculer $\int_0^{2\pi} \left(6 \cos^4 \theta - \frac{3 \sin^4 \theta}{2} \right) d\theta$.

On pourra au choix utiliser la formule de Green-Riemann et la question a), ou faire un calcul direct.

EXERCICE 2— On pose $l(x, y) = 3x + 4y$, $p(x, y) = x^2 + y^2$, et on introduit la fonction $F(l, p) = l \exp(-p)$. Enfin, on pose

$$G(x, y) = F(l(x, y), p(x, y)) = (3x + 4y) \exp(-x^2 - y^2).$$

a. Calculer les dérivées partielles de G en fonction de $\frac{\partial F}{\partial l}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$.

b. Déterminer les points critiques de F .

c. Déterminer les extrema locaux de F .

EXERCICE 3— Soient U et V les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ définis par $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ et $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - 4x > 0\}$, et soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $\varphi(x, y) = (xy, x + y)$. On posera $u = xy$ et $v = x + y$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Calculer la matrice jacobienne de φ .

3. Montrer que pour $M \in U$, $\varphi(M) \in V$; montrer que la restriction $\varphi|_U$ de φ à U induit une bijection de U vers V . Montrer que $(\varphi|_U)^{-1}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$.

4. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant l'équation

$$(\star) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 3(x - y)f(x, y) = 0 .$$

On pose $g := f \circ \varphi|_U^{-1}$; calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - 3g(x, y)$.

5. Déterminer toutes les fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $(\star)$.

EXERCICE 4— On désigne par K le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ des points N de coordonnées (x, y) tels que $9x^2 + 4y^2 \leq 1$.

1. Donner une représentation paramétrique du bord de K parcouru dans le sens direct.

2. a. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; exprimer à l'aide de f l'intégrale

$$\int \int_K f'(9x^2 + 4y^2) dx dy$$

(f' désignant la dérivée de f).

Indication - On pourra faire le changement de variables $x = \frac{1}{3}r \cos \varphi$ et $y = \frac{1}{2}r \sin \varphi$.

b. Utiliser a pour calculer l'aire de K et l'intégrale

$$I = \int \int_K (9x^2 + 4y^2)^2 dx dy$$