Corrigé LM125 juin 2006

a) $P, Q \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \left((\lambda P + \mu Q)(0), (\lambda P + \mu Q)'(1), (\lambda P + \mu Q)''(2), (\lambda P + \mu Q)'''(3)\right) \\ &= \lambda (P(0), P'(1), P''(2), P'''(3)) + \mu (Q(0), Q'(1), Q''(2), Q'''(3)) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

$$f(P) = (P(0), P'(1), P''(2), P'''(3))$$

b) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$. Alors

$$P'(X) = b + 2cX + 3dX^2,\ P''(X) = 2c + 6dX,\ P'''(X) = 6d$$

$$f(P) = (a, b + 2c + 3d,\ 2c + 12d, 6d).$$

Donc $P \in \ker f \Leftrightarrow (a, 2c + 3d,\ 2c + 12d, 6d) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{E}}$.

Il résulte que f est injective. E étant de dimension 4, E et $\mathbb{R}^4$ ont la même dimension, donc f est bijective.

c) $H_i = f^{-1}(e_{i+1}) \Leftrightarrow f(H_i) = e_{i+1}$. Soit

$$H_i(X) = a_i + b_i X + c_i X^2 + d_i X^3,\ 0 \leqslant i \leqslant 3.$$

On a:

i)

$$(a_0, b_0 + 2c_0 + 3d_0,\ 2c_0 + 12d_0, 6d_0) = (1,0,0,0)$$

donc

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0,\ d_0 = 0$$

et

$$H_0(X) = 1.$$

ii)

$$(a_1, b_1 + 2c_1 + 3d_1,\ 2c_1 + 12d_1, 6d_1) = (0,1,0,0)$$

donc

$$a_1 = 0,\ d_1 = 0,\ c_1 = 0, b_1 = 1$$

et

$$H_1(X) = X.$$

iii)

$$(a_2, b_2 + 2c_2 + 3d_2,\ 2c_2 + 12d_2, 6d_2) = (0,0,1,0)$$

donc

$$a_2 = 0,\ d_2 = 0,\ c_2 = \frac{1}{2},\ b_2 = -1$$

et

$$H_2(X) = -X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{X(X-2)}{2}.$$

iv)

$$(a_3, b_3 + 2c_3 + 3d_3,\ 2c_3 + 12d_3, 6d_3) = (0,0,0,1)$$

donc

$$a_3 = 0, d_3 = \frac{1}{6},\ c_3 = -1,\ b_3 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

donc

$$H_3(X) = \frac{3}{2}X - X^2 + \frac{1}{6}X^3 = \frac{X\left(X^2 - 6X + 9\right)}{6} = \frac{X\,(X-3)^2}{6}.$$

d) f (et donc f^{-1}) étant un isomorphisme et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$, il résulte que $(f^{-1}(e_1), f^{-1}(e_2), f^{-1}(e_3), f^{-1}(e_4)) = \mathcal{H}$ est une base de E.

$$f(P) = P(0)\,e_1 + P'(1)\,e_2 + P''(2)\,e_3 + P'''(3)\,e_4$$

donc

$$\begin{aligned} P &= f^{-1}\left(P(0)\,e_1 + P'(1)\,e_2 + P''(2)\,e_3 + P'''(3)\,e_4\right) \\ &= P(0)\,f^{-1}(e_1) + P'(1)\,f^{-1}(e_2) + P''(2)\,f^{-1}(e_3) + P'''(3)\,f^{-1}(e_4) \\ &= P(0)\,H_0 + P'(1)\,H_1 + P''(2)\,H_2 + P'''(3)\,H_3. \end{aligned}$$

2) a)

$$f(P) = (a, b + 2c + 3d,\ 2c + 12d, 6d).$$

$$f(1) = e_1,\ f(X) = e_2,\ f\left(X^2\right) = 2e_2 + 2e_3,\ f\left(X^3\right) = 3e_2 + 12e_3 + 6e_4$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b)

$$[f]_{\mathcal{H}}^{\mathcal{C}} = \mathbf{1}_4.$$

c) Pour tout $P \in E$ on a $P = P(0)\,H_0 + P'(1)\,H_1 + P''(2)\,H_2 + P'''(3)\,H_3$, donc

$$1 = H_0,\ X = H_1,\ X^2 = 2H_1 + 2H_2,\ X^3 = 3H_1 + 12H_2 + 6H_3$$

et la matrice de passage de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque. On aurait pu écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{H}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

et calculer P^{-1}.

3) $P \in \mathbb{R}_3[X]$, donc $P^* \in \mathbb{R}_4[X]$, $XP + (X-1)\,P^* \in \mathbb{R}_5[X]$ donc $g(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Pour $P, Q \in E$ on a $XP + (X-1)\,P^* = g(P)\,X^2 + aX + b$
$XQ + (X-1)\,Q^* = g(Q)\,X^2 + \alpha X + \beta$
donc

$$X(P+Q) + (X-1)(P^* + Q^*) = (g(P) + g(Q))\,X^2 + (a+\alpha)\,X + b + \beta.$$

Comme et donc $g(P) + g(Q)$ est le quotient de la division de

$$(P^* + Q^*)' = P^{*\prime} + Q^{*\prime} = P + Q$$

et

$$(P^* + Q^*)(0) = P(0) + Q(0) = 0,$$

on a
$$P^* + Q^* = (P + Q)^*$$
et
$$X(P+Q) + (X-1)(P+Q)^* = (g(P) + g(Q))X^2 + (a+\alpha)X + b + \beta$$
et donc
$$g(P) + g(Q) = g(P+Q).$$
Analogue
$$g(\lambda P) = \lambda g(P).$$
b)

i) Si $P = 1$, $P^* = X$, donc
$$XP + (X-1)P^* = X + X(X-1) = X^2 = 1 \cdot X^2$$
ii) Si $P = X$, $P^* = \frac{X^2}{2}$, donc
$$XP + (X-1)P^* = X^2 + (X-1)\frac{X^2}{2} = \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{2} = \left(\frac{X+1}{2}\right) \cdot X^2$$
iii) Si $P = X^2$, $P^* = \frac{X^3}{3}$
$$XP + (X-1)P^* = X^3 + (X-1)\frac{X^3}{3} = \frac{X^4}{3} + \frac{2X^3}{3} = \left(\frac{X^2+2X}{3}\right) \cdot X^2$$
iv) Si $P = X^3$, $P^* = \frac{X^4}{4}$
$$XP + (X-1)P^* = X^4 + (X-1)\frac{X^4}{4} = \frac{X^5}{4} + \frac{3X^4}{4} = \left(\frac{X^3+3X^2}{4}\right) \cdot X^2$$
donc
$$[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
3)
$$P_0 = 1,\ P_1 = X - 1,\ P_2 = \frac{(X-1)(X-3)}{2},\ P_3 = \frac{(X-1)(X-4)^2}{6}.$$
$$P_0 = 1,\ P_0^* = X,\ XP_0 + (X-1)P_0^* = X + (X-1)X = X^2$$
donc
$$g(P_0) = P_0.$$
$$\begin{aligned} P_1 &= X-1,\ P_1^* = \frac{X^2}{2} - X,\ XP_0 + (X-1)P_0^* = X(X-1) + (X-1)\left(\frac{X^2}{2} - X\right) \\ &= X(X-1)\left(1 + \frac{X}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}X^2(X-1), \end{aligned}$$
donc
$$g(P_1) = \frac{1}{2}(X-1) = \frac{1}{2}P_1$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{(X-1)(X-3)}{2} = \frac{X^2-4X+3}{2},\ P_2^* = \frac{X^3}{6} - X^2 + \frac{3X}{2} = \frac{X^3-6X^2+9X}{6} \\
&= \frac{X(X-3)^2}{6},\ XP_2 + (X-1)P_2^* = \frac{X(X-1)(X-3)}{2} + (X-1)\frac{X(X-3)^2}{6} \\
&= X(X-1)(X-3)\left(\frac{1}{2} + \frac{X-3}{6}\right) = \frac{1}{6}X^2(X-1)(X-3)
\end{aligned}$$

donc

$$g(P_2) = \frac{1}{6}(X-1)(X-3) = \frac{1}{3}P_2.$$

Remarque. Pour P_3 on a:

$$\begin{aligned}
P_3 &= \frac{(X-1)(X-4)^2}{6} = \frac{(X-1)\left(X^2-8X+16\right)}{6} = \frac{X^3-9X^2+24X-16}{6}, \\
P_3^* &= \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{2} + 2X^2 - \frac{8X}{3} = \frac{X^4-12X^3+48X^2-64X}{24} = \\
&\frac{X^4-4X^3-8X^3+32X^2+16X^2-64X}{24} \\
&= \frac{(X-4)\left(X^3-8X^2+16X\right)}{24} = \frac{X(X-4)^3}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
XP_3 + (X-1)P_3^* &= X\frac{(X-1)(X-4)^2}{6} + (X-1)X\frac{(X-4)^3}{24} \\
&= X(X-1)(X-4)^2\left(\frac{1}{6} + \frac{X-4}{24}\right) \\
&= \frac{1}{24}X^2(X-1)(X-4)^2
\end{aligned}$$

donc

$$g(P_3) = \frac{1}{24}(X-1)(X-4)^2 = \frac{1}{4}P_3.$$

Exercice II

a)

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3$$

donc 5 est valeur propre de multiplicité 3.

Pour trouver les vecteurs propres on résout

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = z = 0.$

l'espace propre associé est $\{x, 0, 0\}$.

b)Cet espace est de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

c)

$$(A - 5I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A-5I_3\right)^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

donc

$$\left(A-5I_3\right)^n=\mathbf{0}_3 \ si\ n\geqslant 3.$$

Donc

$$\begin{aligned}A^n &= \left(5I_3+\left(A-5I_3\right)\right)^n=\left(5I_3\right)^n+C_n^1\left(5I_3\right)^{n-1}\left(A-5I_3\right)+C_n^2\left(5I_3\right)^{n-2}\left(A-5I_3\right)^2\\ &= 5^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n5^{n-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}5^{n-2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5^n&n5^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}5^{n-2}\\0&5^n&n5^{n-1}\\0&0&5^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice III

Puisque $P\in\mathbb{R}[\mathbb{X}]$, $2-i$ est aussi racine de P, donc P est divisible par

$$\left(X-2-i\right)\left(X-2+i\right)=\left(X-2\right)^2+1=X^2-4X+5.$$

On obtient par divison:

$$\begin{aligned}5X^4-24X^3+42X^2-24X+5 &= \left(5X^2-4X+1\right)\left(X^2-4X+5\right)\\ &= 5\left(X-2-i\right)\left(X-2+i\right)\left(X+\frac{2-i}{5}\right)\left(X+\frac{2+i}{5}\right)\end{aligned}$$