**Université Pierre et Marie Curie**

Unité LM125 *Session de juin 2006*

**Examen durée 2 heures**

*L'usage des calculatrices est interdit*

*Merci d'éteindre téléphones portables et baladeurs*

Les exercices sont indépendants et ne sont classés par ordre de difficulté.

## Exercice I

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vecoriel des polynômes de degré au plus 3.

On note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de $E$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

**1)** On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $P \in E$ par

$$f(P) = \left(P(0), P'(1), P''(2), P'''(3)\right)$$

où $P^{(j)}$ est la dérivée d'ordre $j$ de $P$.

**a)** Montrer que $f$ est linéaire.

**b)** Déterminer ker $f$. En déduire que $f$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**c)** Calculer les polynômes $H_i = f^{-1}(e_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, 3$.

**d)** Montrer que $\mathcal{H} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ est une base de $E$ et que pour tout $P \in E$ on a $P = \sum_{i=0}^{3} P^{(i)}(i) H_i$.

**2)**

**a)** Ecrire la matrice de $f$ relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

**b)** Ecrire la matrice de $f$ relative aux bases $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$.

**c)** Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{H}$ à la base $\mathcal{B}$.

**3)** Pour $P \in E$ on note $P^*$ la primitive de $P$ qui s'annule en 0 (l'unique polynôme $P^*$ tel que $(P^*)' = P$ et $P^*(0) = 0$). Pour tout $P \in E$, on note par $g(P)$ le quotient de la division euclidienne de $XP + (X-1)P^*$ par $X^2$.

**a)** Montrer que $g(P) \in E$ et que l'application $P \mapsto g(P)$ est un endomorphisme de $E$.

**b)** Ecrire la matrice de $g$ relative à la base $\mathcal{B}$. En déduire que pour tout $0 \leqslant i \leqslant 3$, $\frac{1}{i+1}$ est valeur propre de $g$ et que $g$ est diagonalisable.

**c)** Pour $0 \leqslant i \leqslant 3$, on pose $P_i(X) = H_i(X-1)$. Montrer que $P_1$ et $P_2$ sont vecteurs propres de $g$.

## Exercice II

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**a)** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.

**b)** Est-ce que $A$ est diagonalisable?

**c)** Calculer $(A - 5\mathbf{I}_3)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mathbf{I}_3$ est la matrice unité d'ordre 3. En déduire $A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

## Exercice III

On considère le polynôme

$$P(X) = 5X^4 - 24X^3 + 42X^2 - 24X + 5$$

Sachant que $P$ admet la racine $2 + i$, en déduire la décomposition de $P$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ et dans $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$.