Université Pierre et Marie Curie.
Licence Sciences et Technologies. MIME

Examen de l'UE LM 125. Session de Septembre 2005.
Durée de l'épreuve : 2 heures.

L'usage de tout document, de calculatrice, de téléphone portable ou de baladeur est interdit.

Problème I. Soit $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^4$. On désigne par f^2 (resp. f^3) l'endomorphisme $f \circ f$ (resp. $f \circ f \circ f$) de $\mathbb{C}^4$. Soit $v \in \mathbb{C}^4$ un vecteur non nul. On suppose que la partie $(v, f(v), f^2(v))$ est libre et que $(v, f(v), f^2(v), f^3(v))$ est liée.

1) Montrer qu'il existe trois nombres complexes a_0, a_1 et a_2 déterminés de manière unique tels que :

$$f^3(v) = a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v).$$

2) Soit F le sous-espace de $\mathbb{C}^4$ engendré par les vecteurs :

$$f^n(v) = (\underbrace{f \circ .. \circ f}_{nfois})(v), n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de F, et que ce dernier est stable par f (c'est à dire $f(F) \subset F$).

Celà nous permet de définir l'endomorphisme $\widetilde{f} : F \to F$ par : $\forall u \in F, \widetilde{f}(u) = f(u)$.

3) Écrire la matrice de $\widetilde{f}$ dans la base $(v, f(v), f^2(v))$.

4) Quel est le polynôme caractéristique de $\widetilde{f}$?

5) Montrer que l'endomorphisme $P(\widetilde{f}) = \widetilde{f}^3 - a_2\widetilde{f}^2 - a_1\widetilde{f} - a_0 Id$ est nul.

Problème II. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques (c'est à dire à valeurs réelles) définies sur $\mathbb{R}$.

1) Soient C et S les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $C(x) = \cos x$ et $S(x) = \sin x$. Montrer que $\{C, S\}$ est une famille libre de E. Quelle est la dimension du $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel F engendré par $\{C, S\}$?

2) Soient a, b, et c trois nombres réels, on considère les fonctions G, H et K définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \cos(x + a), H(x) = \cos(x + b) \text{ et } K(x) = \cos(x + c).$$

Montrer que G, H et K sont dans F et donner leurs coordonnées relatives à la base $\{C, S\}$.

3) Le système $\{G, H, K\}$ est-il libre ? Discuter son rang selon les valeurs de a, b et c.

Problème III. Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Définir a et b pour que $detA = 25$. Montrer que l'on obtient une valeur propre double. La matrice obtenue est-elle diagonalisable ?