Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies MIME
Corrigé de l'examem LM125
session septembre 2005

Problème I

1) Par hypothèse, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\alpha v + \beta f(v) + \gamma f^2(v) + \delta f^3(v) = 0_{\mathbb{C}^4}.$$

Si $\delta = 0$, alors

$$\alpha v + \beta(v) + \gamma f^2(v) = 0_{\mathbb{C}^4}.$$

$(v, f(v), f^2(v))$ étant libre on a $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Contradiction.

Donc $\delta \neq 0$ et

$$f^3(v) = -\frac{\alpha}{\delta} v - \frac{\beta}{\delta} f(v) - \frac{\gamma}{\delta} f^2(v) = a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f^2(v).$$

$(v, f(v), f^2(v))$ étant libre a_0, a_1, a_2 sont uniques.

2) Hypothèse de récurrence, pour $n \geq 0$

$$f^{n+3}(v) = \alpha_{n+3} v + \beta_{n+3} f(v) + \gamma_{n+3} f^2(v).$$

Cf 1) c'est vrai pour $n = 0$.

Alors

$$\begin{aligned} f^{n+4}(v) &= f\left(f^{n+3}(v)\right) = \alpha_{n+3} f(v) + \beta_{n+3} f^2(v) + \gamma_{n+3} f^3(v) \\ &= \alpha_{n+3} f(v) + \beta_{n+3} f^2(v) + \gamma_{n+3}\left(\alpha_3 v + \beta_3 f(v) + \gamma_3 f^2(v)\right) \\ &= \gamma_{n+3}\alpha_3 v + (\alpha_{n+3} + \gamma_{n+3}\beta_3) f(v) + (\beta_{n+3} + \gamma_{n+3}\gamma_3) f^2(v) \\ &= \alpha_{n+4} v + \beta_{n+4} f(v) + \gamma_{n+4} f^2(v) \end{aligned}$$

Donc $(v, f(v), f^2(v))$ est génératrice de F. Puisque $(v, f(v), f^2(v))$ est libre, elle est une base de F. Comme $f(v) \in F$, $f(f(v)) = f^2(v) \in F$, et $f(f^2(v)) = f^3(v) \in F$ on a $f(F) \subset F$;

3) La matrice de $\widetilde{f}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

4) Le polynôme caractéristique est donc

$$\begin{aligned} C_{\widetilde{f}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & a_1 \\ 1 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} + a_0 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)\left(\lambda^2 - a_2\lambda - a_1\right) + a_0 = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0. \end{aligned}$$

5)Le théorème de Cayley-Hamilton implique

$$C_{\widetilde{f}}\left(\widetilde{f}\right) = -\widetilde{f}^3 + a_2\widetilde{f}^2 + a_1\widetilde{f} + a_0 Id_F = 0_{EndF}.$$

.

Remarque : on peut aussi faire le calcul explicite en utilisant la matrice trouvée au 3).

Problème III

1) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha C + \beta S = 0_E$. On a $\alpha \cos x + \beta \sin x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$ on obtient $\alpha = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a $\beta = 0$. Donc $\{C, S\}$ est libre et $\dim\left(Vect\{C, S\}\right) = 2$.

2) On a $G(x) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$, $H(x) = \cos x \cos b - \sin x \sin b$, $K(x) = \cos x \cos c - \sin x \sin c$.

Donc $G = (\cos a)\, C + (-\sin a)\, S$, $H = (\cos b)\, C + (-\sin b)\, S$, $K = (\cos c)\, C + (-\sin c)\, S$.

3) Non car $\dim\left(Vect\{C, S\}\right) = 2$. On considère

$$\begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ -\sin a & -\sin b & -\sin c \end{pmatrix}$$

Comme

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ -\sin\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix} = \sin(\alpha - \beta)$$

on obtient:

1) Si $a - b \neq k\pi$ ou $b - c \neq k\pi$ ou $c - a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\dim\left(Vect\{G, H, K\}\right) = 2$.

2) Si $a - b = k\pi$ et $b - c = k'\pi$, $k, k' \in \mathbb{Z}$, alors $\dim\left(Vect\{G, H, K\}\right) = 1$.

Problème II

Si le déterminant de la matrice vaut 25, on a

$$\begin{vmatrix} 8 & a \\ b & 2 \end{vmatrix} = 16 - ab = 25$$

donc $ab = -9$. On peut , par exemple, prendre $a = 3$, $b = -3$.

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & a \\ b & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16 - ab = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2.$$

Les vecteurs propres sont $v(x, y)$ tel que

$$3x - ay = 0$$

donc $\dim E_5 = 1$ pour tout a et donc la matrice n'est pas diagonalisable.