Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies. MIME

Examen de l'UE LM125 "Espaces vectoriels"
Corrigé de la session de juin 2005

Exercice 1

a) Résolvons l'équation $aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3 = 0$ en les réels *a, b, c, d* .
Prenant la valeur en 1, on obtient *a* = 0. On en déduit la nullité du polynôme
$bP_1 + cP_2 + dP_3 = b(X-1) + c(X-1)^2 + d(X-1)^3 = (X-1)\left(b + c(X-1) + d(X-1)^2\right)$
qui implique celle de $b + c(X-1) + d(X-1)^2$.
Prenant à nouveau la valeur en 1, on obtient *b* = 0, puis $c + d(X-1) = 0$, d'où *c* = 0 et *d* = 0 : la famille $S = \left(P_0, P_1, P_2, P_3\right)$ est libre.

On sait que $\mathbb{R}^3[X]$ est un espace vectoriel réel de dimension 4. *S*, qui est libre et a 4 éléments, est une base de $\mathbb{R}^3[X]$.

b) Pour écrire les coordonnées du polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + 1$ sur cette base, on peut, si on la connaît, appliquer la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1)(X-1)^2/2! + P'''(1)(X-1)^3/3! = P(1)P_0 + P'(1)P_1 + \frac{P''(1)}{2}P_2 + \frac{P'''(1)}{6}P_3.$$

Compte tenu de

$$\begin{cases} P(1) = a + b + 2 \\ P'(1) = 3 + 2a + b \\ P''(1) = 6 + 2a \\ P'''(1) = 6 \end{cases}$$

cela donne, $P = (a+b+2)P_0 + (3+2a+b)P_1 + (a+3)P_2 + P_3$ (*).

◆ On peut aussi procéder directement et résoudre $P = cP_0 + dP_1 + eP_2 + fP_3$ (**)
Prenant la valeur en 1 on obtient $P(1) = cP_0(1)$ soit $c = a + b + 2$.

On prend alors la dérivée de (**) : $P'(X) = 3X^2 + 2aX + b = d + e2(X-1) + f3(X-1)^2$, la valeur en 1 donne $d = 3 + 2a + b$.
On dérive à nouveau $P''(X) = 6X + 2a = +e2 + f6(X-1)$ qui en 1 donne $e = a + 3$. On obtient finalement $f = 1$ (il suffit de regarder les termes de degré 3)
◆ Bien sûr, on peut aussi résoudre le système obtenu en écrivant explicitement $cP_0 + dP_1 + eP_2 + fP_3$ sur la base canonique.

c) D'après l'égalité (*), on peut écrire $P = \left((a+b+2) + (3+2a+b)(X-1)\right) + (X-1)^2\left((a+3) + (X-1)\right)$.

P a une racine d'ordre 2 au moins en 1 si et seulement s'il est divisible par $(X-1)^2$ c'est-à-dire si

$$\begin{cases} a + b + 2 & = 0 \\ 2a + b + 3 & = 0 \end{cases}.$$

Résolvant ce système 2x2 on obtient $a = b = -1$.

c) Posons $Q_2 = (X-2)^2, Q_3 = (X-2)^3$. Un raisonnement analogue à celui de la question précédente montre que l'élément *Q* de $\mathbb{R}^3[X]$ admet 1 (resp 2) pour racine au moins double si et seulement s'il appartient au sous espace vectoriel F (resp G) engendré par P_2 et P_3 (resp Q_2 et Q_3). D'après le a), F est de dimension 2 (et pour une raison analogue G aussi). D'après le théorème de la dimension d'une somme, on a $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)=4-\dim(F\cap G)$ et donc $\mathbb{R}^3[X]=F\oplus G$ si et seulement si $F\cap G=(0)$ ou $F+G=\mathbb{R}^3[X]$.

On peut conclure de deux façons :

- on résout $aP_2+bP_3+cQ_2+dQ_3=0$. En prenant les dérivées nous obtenons $0=aP_2'+bP_3'+cQ_2'+dQ_3'=2a(X-1)+3b(X-1)^2+2c(X-2)+3d(X-2)^2$.

  Prenant les valeurs en 1 et 2 de ces deux équations nous donne le système $\begin{cases} 0 & +c-d & = & 0 \\ 0 & -2c+3d & = & 0 \\ a+b & +0 & = & 0 \\ 2a+3b & +0 & = & 0 \end{cases}$.

  Les deux premières équations impliquent $c = d = 0$ et les deux dernières $a = b = 0$, la famille (P_2,P_3,Q_2,Q_3) est donc libre, c'est une base de l'espace $\mathbb{R}^3[X]$. Tout élément P de $\mathbb{R}^3[X]$ s'écrit donc $P=aP_2+bP_3+cQ_2+dQ_3=(aP_2+bP_3)+(cQ_2+dQ_3)$, donc $F+G=\mathbb{R}^3[X]$.
- ou bien on considère un élément P de $F\cap G$, il est divisible par $(X-1)^2$ et $(X-2)^2$ qui sont premiers entre eux donc par leur produit (lemme de Gauss). Ce produit est de degré 4 et P est de degré au plus 3 , donc P est nul et $F\cap G=(0)$.

***Exercice* II**

1) Un élément (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ est dans le noyau de f si et seulement si

$$\begin{cases} 3x & -4y & +8z & = & 0 \\ 5x & -6y & +10z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{cases}.$$

On permute la première et la troisième lignes et appliquant la méthode du pivot on a

$\begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ 0 & -y & +5z & = & 0 \\ 0 & -y & +5z & = & 0 \end{cases}$ qui admet pour solutions $\begin{cases} x=4a \\ y=5a \\ z=a \end{cases}, a\in\mathbb{R}$.

On a donc $\ker f=\{a(4,5,1), a\in\mathbb{R}\}$. Ce qui montre que le vecteur (4,5,1) est une base de ker f qui est de dimension 1.

2) Le polynôme caractéristique de F est

$P(x)=\begin{vmatrix} 3-x & -4 & 8 \\ 5 & -6-x & 10 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$. Faisons "apparaître des zéros" sur la dernière ligne et développons par rapport à cette dernière ligne

$$P(x)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & C_2+C_1 & C_3+(x-1)C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3-x & -1-x & 8+(3-x)((x-1) \\ 5 & -5-x & 10+5(x-1) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} -1-x & 5+4x-x^2 \\ -1-x & 5x-5 \end{vmatrix}$$

puis

$P(x)=(-1-x)\begin{vmatrix}1 & 5+4x-x^2\\ 1 & 5x+5\end{vmatrix}=(-1-x)(5x+5-5-4x+x^2)=-(x+1)^2x$.

Les valeurs propres de *f* sont donc 0 (simple) et -1 (double).

Remarque : on a une double vérification , puisque ker *f* est de dimension 1 on sait que 0 est valeur propre. La formule de la trace est bien vérifiée 3-6+1=0+2(-1).

Pour savoir si *f* est diagonalisable on cherche l'espace E_{-1} propre associé à -1 et on résout

$$\begin{cases}(3+1)x & -4y & +8z & = & 0\\ 5x & (-6+1)y & +10z & = & 0\\ x & -y & (1+1)z & = & 0\end{cases}$$

système qui se réduit à la seule équation $x - y + 2z = 0$.

Une base de E_{-1} est par exemple (u , v) avec $u=(1,1,0)$ et $v = (-2, 0 , 1)$. La dimension de E_{-1} est donc 2 et *f* est diagonalisable.

3) Pour avoir une matrice de passage, il suffit de prendre une base de vecteurs propres, on peut prendre par exemple

$$P=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 5 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Remarque : pour cette matrice *P* on sait, sans calcul, que $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

4) Le calcul montre que $A^2+A=0$.

Les réfractaires aux calculs pourront utiliser la remarque précédente et écrire :

$$P^{-1}(A^2+A)P=(P^{-1}AP)^2+P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=0.$$

5) Pour $n\geq 2$, la division euclidienne montre qu'il existe deux réels *a* et *b* et un polynôme *Q* tels que $X^n=(X^2+X)Q(X)+aX+b.$ Prenant la valeur en 0, on obtient $b = 0$ puis prenant la valeur en -1 $(-1)^n=-a$ soit $a=(-1)^{n+1}$.

On a donc $X^n=(X^2+X)Q(X)+(-1)^{n+1}X$ (***).

6) Compte tenu de l'égalité $A^2+A=0$, l'identité (***) appliquée pour $X = A$ donne $A^n=(-1)^{n+1}A$.

Remarque : on peut aussi procéder par récurrence à partir de l'egalité $A^2=-A$.

***Exercice* III**

1) La matrice (3x3) *M* est triangulaire, avec des éléments non nuls sur la diagonale : elle est inversible, donc de rang 3.

Pour ce qui est de la matrice *R* , remarquons que si l'on permute les colonnes 2 et 3 on obtient la matrice échelonnée $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ qui est de rang 2 donc *R* l'est aussi.

2) Comme *M* est inversible *A* et *MR* ont même rang : 2.

3) Pour augmenter le rang de *A* il suffit d'augmenter le rang de *R* donc de changer un élément pour la matrice *R'* obtenue soit de rang 3.

On peut par exemple choisir $R' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui par permutation des colonnes 2 et 3 donne la matrice de rang 3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$.