Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies
MIME

Examen de l'UE LM125
Janvier 2006
durée de l'épreuve 2 heures
L'usage de tout document, de calculatrice ou de téléphone portable est interdit

I. Question de cours

Définition de la notion de sous-espace vectoriel. Définition du noyau d'une application linéaire. Démonstration de la propriété « le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel ».

II. 1) Soit **E** l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X de degré au plus 3 (**E** contient le polynôme nul dont le degré est par convention $-\infty$).

Pour P dans **E** on définit $Q = u(P)$ par $Q(X) = \dfrac{P(-X) - P(X)}{2}$. Montrer que l'application $u : P \mapsto u(P) = Q$ est une application linéaire de **E** dans **E.**

Ecrire la matrice de u relative à la base canonique de **E**.

Déterminer le noyau Ker u, l'image Im u et montrer que $\mathbf{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

2) Soit **F** un espace vectoriel réel et u une application linéaire de **F** dans **F** vérifiant $u \circ u = -u$. Montrer que pour tout x dans **F** on a $x + u(x) \in \operatorname{Ker} u$. En déduire que $\mathbf{F} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

III. Soit **E** l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X de degré au plus 2 (**E** contient le polynôme nul dont le degré est par convention $-\infty$). On note P' le polynôme dérivé du polynôme P.

A tout polynôme P on associe le polynôme $f(P) = (X^2 - 1)P' - (2X + 1)P$.

1) Calculer $f(1), f(X), f(X^2)$. Montrer que f est une application linéaire de **E** dans **E.** Ecrire la matrice A de f relative à la base canonique.

2) Déterminer les valeurs propres puis les vecteurs propres de f. A est-elle diagonalisable ? Si oui donner une matrice diagonale semblable à A.

3) Soit n un entier naturel non nul et **F** l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X de degré au plus n (**F** contient le polynôme nul dont le degré est par convention $-\infty$). A tout polynôme P on associe le polynôme $g(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P$.

a) Calculer $g(X^i)$, $i \in \{0,1,...,n\}$. Pour quelles valeurs de i le degré de $g(X^i)$ est-il égal à celui de X^i ?

b) Montrer que g est une application linéaire de **F** dans **F.**

c) Montrer que si P est un vecteur propre de g, P est de degré n.

d) Pour $i \in \{0,1,...,n\}$ on définit le polynôme $P_i = (X-1)^i (X+1)^{n-i}$.

Montrer que pour $i \in \{0,1,...,n\}, g(P_i) = (2i - n - 1)P_i$. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres associés de g. g est-elle diagonalisable ?