Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies
MIME

Examen de l'UE LM125
Janvier 2006
Corrigé

I. Question de cours

Voir le cours

II. 1) Soit **E** l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X de degré au plus 3 (**E** contient le polynôme nul dont le degré est par convention -∞).

Pour P dans **E** on définit $Q = u(P)$ par $Q(X) = \dfrac{P(-X) - P(X)}{2}$. Montrer que l'application $u : P \mapsto u(P) = Q$ est une application linéaire de **E** dans **E.**

L'application u est à image contenue dans **E** car si P est dans **E**, $P(-X)$ est aussi dans **E**, qui est stable par combinaison linéaire donc $u(P)$ est dans **E**. u est linéaire car l'application $P(X) \mapsto P(-X)$ est linéaire.

Écrire la matrice de u relative à la base canonique de **E**.

Le calcul des images des vecteurs de la base canonique $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ est immédiat et la matrice relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau Ker u, l'image Im u et montrer que $\mathbf{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Le noyau Ker u est constitué des polynômes tels que $P(X) = P(-X)$: les polynômes *pairs*, une base est $\left(1, X^2\right)$, la lecture de la matrice précédente montre que l'image est engendrée par $-X, -X^3$ et donc que $\left(X, X^3\right)$ est une base de Im u.

Comme $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ est une base de **E**, il est alors clair que $\mathbf{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

2) Soit **F** un espace vectoriel réel et u une application linéaire de **F** dans **F** vérifiant $u \circ u = -u$. Montrer que pour tout x dans **F** on a $x + u(x) \in \operatorname{Ker} u$. En déduire que $\mathbf{F} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

- ✓ Pour tout x dans **F**, puisque $u \circ u = -u$ on a
  $u(x + u(x)) = u(x) + u(u(x)) = u(x) - u(x) = 0$ et $x + u(x) \in \operatorname{Ker} u$. Posons alors
  $v(x) = x + u(x) \in \operatorname{Ker} u$, on a $x = v(x) - u(x)$, ce qui montre que $\mathbf{F} = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$.
- ✓ si $x \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$, il existe y tel que $x = u(y)$, alors
  $u(x) = u(u(y)) = (u \circ u)(y) = -u(y)$ et $u(x) = 0$ implique $u(y) = 0$ et donc $x = 0$ et
  $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = (0)$.

Remarques :

- ✓ l'application u du 1) vérifie cette condition,*
- ✓ si on suppose **F** de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang $\dim\ker u + \dim\operatorname{Im} u = \dim \mathbf{F}$ ce qui compte montre que la somme est directe.

III. Soit **E** l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée *X* de degré au plus 2 (**E** contient le polynôme nul dont le degré est par convention -∞). On note *P'* le polynôme dérivé du polynôme *P*.
A tout polynôme *P* on associe le polynôme $f(P) = (X^2 - 1)P' - (2X + 1)P$.
1) Calculer $f(1), f(X), f(X^2)$. Montrer que *f* est une application linéaire de **E** dans **E.**
Ecrire la matrice *A* de *f* relative à la base canonique.

On a $f(1) = -2X - 1, f(X) = -X^2 - X - 1, f(X^2) = -X^2 - 2X$.
On en déduit que
- ✓ L'application *f* est linéaire car la dérivation est linéaire et la multiplication par un polynôme fixe est linéaire. Elle est à image dans **E** puisque les images des vecteurs d'une base sont dans **E**.
- ✓ La matrice *A* est
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Déterminer les valeurs propres puis les vecteurs propres de *f*. *A* est-elle diagonalisable ? Si oui donner une matrice diagonale semblable à *A*.

Le polynôme caractéristique *D* de *A* est $D(x) = \begin{vmatrix} -1-x & -1 & 0 \\ -2 & -1-x & -2 \\ 0 & -1 & -1-x \end{vmatrix}$. On le développe par exemple par rapport à la première ligne :
$$\begin{aligned} D(x) &= (-1-x)\begin{vmatrix} -1-x & -2 \\ -1 & -1-x \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= (-1-x)\left((-1-x)^2 - 2 - 2\right) = -(1+x)(x^2 + 2x - 3) \\ &= -(1+x)(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc 1, -1 et -3, il y en a 3 distinctes, elles sont simples, la matrice 3x3 *A* est donc diagonalisable. Une matrice diagonale semblable est par exemple
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Espaces propres
- ✓ valeur propre 1

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est vecteur propre si x, y, z sont solutions du système $\begin{cases} -2x & -y & & =0 \\ -2x & -2y & -2z & =0 \\ & -y & -2z & =0 \end{cases}$ qui admet pour solutions $y=-2z, x=z$ et donc un vecteur propre est le polynôme $X^2-2X+1=(X-1)^2$.

- ✓ valeur propre -1

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est vecteur propre si x, y, z sont solutions du système $\begin{cases} & -y & & =0 \\ -2x & & -2z & =0 \\ & -y & & =0 \end{cases}$ qui admet pour solutions $y=0, x=-z$ et donc un vecteur propre est le polynôme $X^2-1=(X+1)(X-1)$.

- ✓ valeur propre -3

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est vecteur propre si x, y, z sont solutions du système $\begin{cases} 2x & -y & & =0 \\ -2x & 2y & -2z & =0 \\ & -y & 2z & =0 \end{cases}$ qui admet pour solutions $y=2z, x=z$ et donc un vecteur propre est le polynôme $X^2+2X+1=(X+1)^2$

3) Soit n un entier naturel non nul et **F** l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X de degré au plus n (**F** contient le polynôme nul dont le degré est par convention -∞).
A tout polynôme P on associe le polynôme $g(P)=(X^2-1)P'-(nX+1)P$.
a) Calculer $g(X^i)$, $i \in \{0,1,...,n\}$. Pour quelles valeurs de i le degré de $g(X^i)$ est-il égal à celui de X^i ?

On a $g(1)=-(nX+1)$ qui est de degré 1 et pour $i>0$
$g(X^i)=(X^2-1)iX^{i-1}-(nX+1)X^i=(i-n)X^{i+i}-X^i-iX^{i-1}$ qui est de degré $i+1$ *si* $i<n$ et de degré $i = n$ si $i = n$.
Le degré de $g(X^i)$ est donc égal à celui de X^i (c'est-à-dire à i) si et seulement si $i = n$.

b) Montrer que g est une application linéaire de **F** dans **F.**

Le même argument qu'au 1) montre que g est une application linéaire de **F** dans **F.**

c) Montrer que si P est un vecteur propre de g, $g(P)$ est de degré n.

Le calcul fait au a) montre que si P (non nul) est de degré $i < n$ alors $g(P)$ est de degré $i+1$, donc P ne peut être vecteur propre. On en déduit que si P est un vecteur propre de g, g est de degré n.

d) Pour $i \in \{0,1,...,n\}$ on définit le polynôme $P_i=(X-1)^i(X+1)^{n-i}$. Montrer que pour $i \in \{0,1,...,n\}, g(P_i)=(2i-n-1)P_i$. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres associés de g. g est-elle diagonalisable ?

On a

- ✓ $P_0=(X+1)^n$, $P_0'=n(X+1)^{n-1}$ d'où

$$\begin{aligned} g(P_0) &= (X^2-1)n(X+1)^{n-1}-(nX+1)(X+1)^n \\ &= (X+1)^n(nX-n-nX-1) \\ &= (X+1)^n(-n-1) = (2\,0-n-1)P_0 \end{aligned}$$

- ✓ $P_n = (X-1)^n$, $P_n' = n(X-1)^{n-1}$ d'où

$$\begin{aligned} g(P_n) &= (X^2-1)n(X-1)^{n-1}-(nX+1)(X-1)^n \\ &= (X-1)^n(nX+n-nX-1) \\ &= (X+1)^n(n-1) = (2n-n-1)P_n \end{aligned}$$

- ✓ Pour $0 < i < n$, $P_i = (X-1)^i(X+1)^{n-i}$ a pour dérivée
  $P_i' = i(X-1)^{i-1}(X+1)^{n-i} + (n-i)(X-1)^i(X+1)^{n-i-1}$, en regroupant on obtient
  $P_i' = (nX+2i-n)(X-1)^{i-1}(X+1)^{n-i-1}$ d'où

$$\begin{aligned} g(P_i) &= (X^2-1)\left((nX+2i-n)(X-1)^{i-1}(X+1)^{n-i-1}\right)-(nX+1)(X-1)^i(X+1)^{n-i} \\ &= (nX+2i-n-nX-1)(X-1)^i(X+1)^{n-i} \\ &= (2i-n-1)P_i \end{aligned}$$

Comme si $i \neq j$ $(2i-n-1) \neq (2j-n-1)$ et pour $i \in \{0,1,...,n\}$, $g(P_i) = (2i-n-1)P_i$, on a $n+1$ valeurs propres distinctes. **F** étant de dimension n + 1, il n'y en a pas d'autre, on a ainsi toutes les valeurs propres de *g*, elles sont simples et *g* est diagonalisable.