Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies
MIME

Examen de l'UE LM125
Janvier 2005
durée de l'épreuve 2 heures
L'usage de tout document, de calculatrice ou de téléphone portable est interdit

I. Question de cours
Définition de valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme. Critère, en fonction du polynôme caractéristique, pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.
Exercice d'application immédiate
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Calculer le polynôme caractéristique de M.
b) La matrice M est-elle diagonalisable sur **R** ? sur **C** ? Si oui indiquer une matrice semblable diagonale (on ne demande pas le calcul des espaces propres).
c) Déterminer $M^3 = M \cdot M \cdot M$.

II. Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X de degré au plus 2 (E contient le polynôme nul dont le degré est par convention $-\infty$).
On considère les deux polynômes $F = X^3$-X+1 , $G = X^3 + 1$ et l'application u qui à tout élément P de E associe le reste de la division euclidienne du polynôme $P.F$ par le polynôme G.
a) Vérifier que u est une application linéaire de E dans E.
b) Écrire la matrice M de u relativement à la base $(1, X, X^2)$ de E.
c) Déterminer les éléments P de E tels qu'il existe un réel a avec $u(P) = aP$.
d) L'application u est-elle injective ? bijective ?
e) En déduire qu'il existe deux polynômes P et Q tels que $P.F + Q.G = 1$ où l'on note 1 le polynôme constant (de degré 0) dont la valeur est 1 (on ne demande pas de calculer explicitement P et Q).

III. Soit F le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de **R** dans **R** engendré par les deux fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto (x+2)e^{-x}$.
a) Quelle est la dimension de F ?
b) Montrer que la dérivation d (qui à une fonction h associe sa dérivée h') est une application linéaire de F dans F.
c) Écrire la matrice A de d relativement à la base (f, g) .
d) Pour n entier positif, calculer (en explicitant la récurrence) A^n.
e) Application : on considère la fonction $h : x \mapsto (2x-3)e^{-x}$, calculer la dérivée d'ordre 17 de h.

