

Examen de l'UE LM125
Janvier 2005
corrigé

I. Question de cours

Définition de valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme.

Soit K un corps, E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

Une **valeur propre** de u est un scalaire (élément de K) a tel qu'il existe un vecteur (élément de E) v **non nul** tel que $u(v) = av$.

Un **vecteur propre** de u est un vecteur (élément de E) v **non nul** tel qu'il existe un scalaire (élément de K) a tel que $u(v) = av$.

Critère, en fonction du polynôme caractéristique, pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Un endomorphisme u du K -espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable (sur K) si et seulement si

- le polynôme caractéristique de u est scindé (c'est-à-dire est produit de facteurs du premier degré) sur K ,
- pour chaque valeur propre a l'espace propre E_a est de dimension égale à la multiplicité de a comme racine du polynôme caractéristique.

Exercice d'application immédiate

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Le polynôme caractéristique de M est (on développe par rapport à la première ligne)

$$P_M(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ -1 & -x & 0 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -1 & -x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -x^3 + 1.$$

Les racines sont 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et j^2 .

b) Sur $\mathbf{R}$, le polynôme caractéristique de M n'est pas scindé donc la matrice M n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Sur $\mathbf{C}$, le polynôme caractéristique de M est scindé et a trois racines simples (distinctes), pour chacune la multiplicité (1) est égale à la dimension (1) de l'espace propre correspondant donc la matrice M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ (si besoin revoir la proposition dans le cours, il est inutile de faire le calcul de l'espace propre : la dimension est au moins 1 puisqu'il n'est pas réduit à zéro et au plus 1 puisqu'elle est inférieure à l'ordre de multiplicité).

Une matrice semblable diagonale a les valeurs propres comme éléments de la diagonale, on peut prendre par exemple

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

c) Pour déterminer $M^3 = M \cdot M \cdot M$, on utilise le fait que M^3 est semblable à D^3 , or

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & j^3 & 0 \\ 0 & 0 & (j^2)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \text{ et par conséquent } M^3 = Id.$$

II. a) Puisque $u(P)$ est le reste d'une division par un polynôme de degré 3, $u(P)$ est un polynôme de degré au plus 2 (ou est nul) et est dans E .

Pour tout couple (P_1, P_2) d'éléments de E et tout réel a , il existe des polynômes Q_1, Q_2 tels que $P_1 F = Q_1 G + u(P_1)$ et $P_2 F = Q_2 G + u(P_2)$. On a alors (on multiplie la deuxième égalité par a et on ajoute à la première en utilisant la commutativité de l'addition des polynômes) :

$$(P_1 + aP_2)F = (Q_1 + aQ_2)G + (u(P_1) + au(P_2)), \text{ avec}$$

$$\deg(u(P_1) + au(P_2)) \leq \sup(\deg(u(P_1)), \deg(u(P_2))) \leq 2.$$

Par définition $u(P_1 + aP_2)$ est le reste de la division de $(P_1 + aP_2)F$ par G , l'unicité du reste dans la division euclidienne implique l'égalité $u(P_1 + aP_2) = u(P_1) + au(P_2)$ qui montre la linéarité de u .

b) Pour écrire la matrice M de u relativement à la base $(1, X, X^2)$ de E , on pose les trois divisions

$$1.(X^3 - X + 1) = 1.(X^3 + 1) - X \text{ donc } u(1) = -X,$$

$$X.(X^3 - X + 1) = X.(X^3 + 1) - X^2 \text{ donc } u(X) = -X^2,$$

$$X^2.(X^3 - X + 1) = (X^2 - 1).(X^3 + 1) + 1 \text{ donc } u(X^2) = 1.$$

Ce qui donne $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, où l'on reconnaît la matrice M de l'exercice précédent¹.

c) Les éléments P de E tels qu'il existe un réel a avec $u(P) = aP$ sont donc 0 et les vecteurs propres de u correspondant aux valeurs propres **réelles** de u : il n'y en a qu'une, 1.

Pour avoir les vecteurs propres correspondants, on résout

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$ qui admet pour solutions les triplets $(a, -a, a)$ pour a réel (pour un

vecteur propre, il faut supposer a non nul) ce qui nous donne les polynômes $a(X^2 - X + 1)$.

d) L'application u est injective puisque c'est un endomorphisme qui n'admet pas la valeur propre 0 et elle est bijective d'après le théorème du rang (c'est une proposition du cours : en dimension finie, un endomorphisme est bijectif si et seulement s'il est injectif).

¹ Si un calcul n'a pas été fait à l'exercice précédent et qu'il est fait ici, on comptera bien sûr les points correspondants du barème).

e) u est bijectif, donc surjectif et 1 est dans l'image de u : c'est-à-dire qu'il existe P et Q tels que $u(P) = 1$ soit $PF = QG + 1$ ou $PF - QG = 1$.

III. Soit F le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ engendré par les deux fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto (x+2)e^{-x}$.

a) Le système (f, g) est générateur par hypothèse, montrons qu'il est libre en résolvant l'équation en les deux réels a et b : $af + bg = 0$

Cela équivaut à $\forall x \in \mathbf{R}, ae^{-x} + b(x+2)e^{-x} = 0$.

Multipliant par e^x , on obtient $\forall x \in \mathbf{R}, a + b(x+2) = 0$. Prenant la valeur en -2 on obtient $a = 0$ puis $b = 0$. Ainsi le système (f, g) est une base de F qui est donc de dimension 2.

b) La dérivation d (qui à une fonction h associe sa dérivée h') est en toute généralité une application linéaire d'après les propriétés (dites algébriques) de la dérivation.

Pour tout x réel : $d(f(x)) = -e^{-x} = -f(x)$ et $d(g(x)) = -(x+2)e^{-x} + e^{-x} = -g(x) + f(x)$, donc $d(f) = -f$ et $d(g) = -g + f$ et par linéarité, pour a et b réels

$d(af + bg) = -af + b(f - g) = (b - a)f - bg \in F$ et d est bien une application de F dans F .

c) On en déduit des calculs précédents que la matrice A de d relativement à la base (f, g) est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Un calcul rapide nous donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela a

conduit à faire l'hypothèse de récurrence

$$H_n \quad A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : admettons la propriété à l'ordre $n \geq 1$ et montrons-la à l'ordre $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n A = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} -1 & 1+n \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & -1-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire : elle est vraie pour tout entier n positif (strictement).

e) On a $h = 2g - 7f$ donc g appartient à E . Les composantes de la dérivée d'ordre 17 de h sont obtenues par le produit

$$(-1)^{17} \begin{pmatrix} 1 & -17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -41 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la dérivée d'ordre 17 de h est la fonction $x \mapsto (-2x + 37)e^{-x}$