Examen session de juin 2007 durée 2 heures
L'usage des calculatrices est interdit
Merci d'éteindre téléphones portables et baladeurs.

Les exercices sont indépendants et ne sont pas classés par ordre de difficulté. Toute réponse non justifiée sera considérée comme fautive. L'énoncé comporte deux pages. **N'oubliez pas de tourner la page !**

Exercice I

On considère le polynôme à coefficients réels

$$P(X) = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 16X + 8.$$

1. Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
2. Montrer que 2 est racine de P et calculer son ordre de multiplicité.
3. En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice II

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées de taille 3×3 . Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A et chercher les sous-espaces propres correspondants.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
(c) Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.
2. Soit $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^3 = D$.
(a) Montrer que Y et D commutent ($YD = DY$).
(b) Montrer que Y est diagonale puis déterminer Y (on ne demande pas de valeur numérique).
3. En déduire les solutions $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $X^3 = A$.

Exercice III

Soient n un entier ≥ 1 et $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré au plus $n-1$. On note Δ l'application qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1) - P(X)$.

1. (a) Montrer que l'application Δ définit un endomorphisme de E (soit $\Delta \in \mathcal{L}(E)$).

- (b) Montrer, en explicitant la récurrence, que si P est un polynôme de degré $k \geq 0$ alors $\Delta(P)$ est un polynôme de degré $k - 1$, où l'on adopte ici comme convention que le polynôme nul est de degré -1 .
- (c) Déterminer $\text{Ker}\Delta$ et $\text{Im}\Delta$.
2. On définit, par récurrence sur $j \geq 1$,

$$\Delta^j = \Delta \circ \Delta^{j-1} \text{ et } \Delta^0 = \text{Id}_E,$$

éléments du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

- (a) Montrer que

$$\{X^{n-1}, \Delta(X^{n-1}), \Delta^2(X^{n-1}), \dots, \Delta^{n-1}(X^{n-1})\}$$

est une base de E .

- (b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{\Delta^j : 0 \leq j \leq n - 1\}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.
- (c) Soit $\mathcal{C}(\Delta) = \{f \in \mathcal{L}(E) : f \circ \Delta = \Delta \circ f\}$. Montrer que $\mathcal{C}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- (d) Montrer que si $f, g \in \mathcal{C}(\Delta)$ alors :

$$f = g \Leftrightarrow f(X^{n-1}) = g(X^{n-1}).$$

- (e) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{C}(\Delta)$.