Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies
MIME

Examen de l'UE LM125
Janvier 2007
durée de l'épreuve 2 heures

L'usage de tout document, de calculatrice ou de téléphone portable est interdit

Les exercices sont indépendants et ne sont pas classés par ordre de difficulté.

A. Question de cours : Énoncé du théorème de la division euclidienne. Démonstration de l'unicité du couple (quotient, reste).

B. Soit $F = \mathbf{R}_4[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4.

a) Peut-on compléter la famille $\left((X+1)^2, (X-1)^2\right)$ en une base de F ? Si oui donner une telle base.

b) Peut-on compléter la famille $\left((X+1)^2, X^2+1, X\right)$ en une base de F ? Si oui donner une telle base.

C. Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2.
On considère l'application f qui au polynôme P appartenant à E associe le polynôme Q où

$$Q(X) = P(1-X) - X^2 P(0).$$

(ainsi f transforme le polynôme $P(X) = X^2+3$ en $Q(X) = (1-X)^2 + 3 - 3X^2$.

1. Vérifier que f est une application linéaire de E dans E. Si $P = aX^2 + bX + c$, expliciter $f(P)$.
2. Écrire la matrice M de f relative à la base $\left(1, X, X^2\right)$ de E.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Trouver l'équation que doivent vérifier a, b, c pour que le polynôme $Q = aX^2 + bX + c$ soit dans l'image de f.

D. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 26 & -13 & 19 \\ 12 & -6 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \\ -12 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les produits AB et BA. Que constate-t-on ?

2) Montrer que A admet 3 valeurs propres distinctes $a<b<c$.

3) Déterminer une matrice P dont les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

4) Soit V un vecteur propre de A, montrer que V est un vecteur propre de B. *(utiliser le fait que A et B commutent).* En déduire sans calcul que $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale.
Facultatif : le vérifier en calculant effectivement $P^{-1}BP$.

E. Déterminer le réel t pour que le polynôme $X^3 - 7X + t$ ait trois racines dont l'une est le double d'une autre.