Examen de l'UE LM125
Janvier 2007
Corrigé

L'énoncé est repris sur fond mauve.

En prune : des commentaires.

Commentaires généraux

- ✓ barème : A/12 B/12 C/24 D/32 E/12 soit un total de 92 pour une note sur 75 : c'était voulu, il était possible d'avoir une note maximale en ne faisant pas tout,
- ✓ avec ce barème le A (question de cours) et le B (exercices d'application immédiate) permettaient d'avoir un paquet substantiel de points permettant de se rapprocher rapidement de la moyenne (37,5),
- ✓ la moyenne au A est de 3,2 sur 12, c'est bien faible pour une question de cours qui était l'une des huit annoncées en novembre
- ✓ la moyenne au B est de 3,8 sur 12, c'est bien peu pour des exercices faciles et qui (aux paramètres près) avaient été donnés (et corrigés) au contrôle de novembre,

A. Question de cours : Énoncé du théorème de la division euclidienne. Démonstration de l'unicité du couple (quotient, reste).

Citons le polycopié numérique en ligne (le copié/collé n'est pas flatteur pour les formules)

Théorème de la division euclidienne des polynômes

Soient f et g deux polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$, g non nul.

Alors **il existe** deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ Q et R , **uniques**, tels que :

$$f = gQ + R \text{ avec } R = 0 \text{ ou } \deg R < \deg g$$

Démonstration de l'unicité

La démonstration se fait par l'absurde.

Soient (Q, R) et (Q', R') satisfaisant aux conditions du théorème.

On a donc à la fois $f = gQ + R$ et $f = gQ' + R'$ avec $R = 0$ ou $\deg R < \deg g$ et $R' = 0$ ou $\deg R' < \deg g$. Il vient alors

$$g(Q - Q') = R' - R$$

Si $Q \neq Q'$, comme $\mathbb{K}[X]$ est intègre, $g(Q - Q')$ est non nul, $R' - R$ aussi et l'on peut donc considérer les degrés de ces polynômes.

$$\text{Cela donne : } \deg(R' - R) = \deg(g(Q - Q')) = \deg(g) + \deg(Q - Q')$$

D'où l'inégalité : $\deg(R' - R) \geq \deg(g)$.

Mais, le polynôme $R' - R$ étant non nul, l'un au moins des deux polynômes R ou R' est non nul et on aura donc (à partir des propriétés $R = 0$ ou $\deg R < \deg g$, $R' = 0$ ou $\deg R' < \deg g$ et dans tous les cas possibles) : $\deg(R' - R) < \deg(g)$.

(Si R et $\mathbf{R}$ sont tous les deux non nuls, on applique le résultat général sur le degré d'une somme de polynômes.)

D'où la contradiction.

Liens

- ✓ <http://www.edu.upmc.fr/math/math1/lm125/lm125.htm>
- ✓ <http://www.uel.education.fr> (rubrique : mathématiques, module : polynômes)

Commentaire :

- ✓ dans le cours la division euclidienne était celle des polynômes, mais la réponse (tout à fait analogue) avec la division euclidienne des entiers était bonne. Par contre parler de division euclidienne dans les réels (comme dans tout corps) est sans intérêt, il y a une division tout court,
- ✓ il faut être précis dans l'énoncé et la démonstration.

B. Soit $F = \mathbf{R}_4[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4.

a) Peut-on compléter la famille $S = ((X+1)^2, (X-1)^2)$ en une base de F ? Si oui donner une telle base.

La famille $((X+1)^2, (X-1)^2)$ est libre. En effet, prenant les valeurs en 1 et -1, l'égalité $a(X+1)^2 + b(X-1)^2 = 0$ implique $a = b = 0$. On peut donc compléter S en une base de F , en choisissant des vecteurs par exemple dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$. Si on remarque que $(X+1)^2 - (X-1)^2 = 4X$, on a que (notant $\text{vect}(P)$ le sous espace vectoriel engendré par une partie P) $\text{vect}((X+1)^2, (X-1)^2) = \text{vect}((X+1)^2, X)$

alors

$\text{vect}((1, (X-1)^2, (X+1)^2, X^3, X^4)) \supset \text{vect}((1, X, (X+1)^2, X^3, X^4)) \supset \text{vect}((1, X, X, X^3, X^4)) = F$
donc $((1, (X-1)^2, (X+1)^2, X^3, X^4))$ est une partie génératrice, qui a $5 = \dim(F)$ éléments : c'est une base.

Commentaire : il y a bien sûr d'autres façons de compléter, mais il faut justifier la liberté de S puis une fois complétée justifier qu'on a bien une base.

b) Peut-on compléter la famille $S' = ((X+1)^2, X^2 + 1, X)$ en une base de F ? Si oui donner une telle base.

On a $(X+1)^2 = X^2 + 1 + 2X$ donc S' n'est pas libre et ne peut être complétée en une base.

C. Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2.

On considère l'application f qui au polynôme P appartenant à E associe le polynôme Q où $Q(X) = P(1-X) - X^2P(0)$.

(Ainsi f transforme le polynôme $P(X) = X^2 + 3$ en $Q(X) = (1-X)^2 + 3 - 3X^2$.)

1. Vérifier que f est une application linéaire de E dans E . Si $P = aX^2 + bX + c$, expliciter $f(P)$.

$P(1-X)$ est de même degré que P et $X^2P(0)$ est nul ou de degré 2 donc Q est dans E .

ne pas oublier le **dans**.

L'application $P \mapsto P(1-X)$ est linéaire et l'application $P \mapsto X^2P(0)$ aussi donc f est linéaire, de E dans E .

$f(aX^2 + bX + c) = a(1-2X+X^2) + b(1-X) + c(1-X^2) = (a-c)X^2 - (2a+b)X + a+b+c$.

2. Écrire la matrice M de f relative à la base $(1, X, X^2)$ de E .

$f(1) = 1 - X^2$, $f(X) = 1 - X$ et $f(X^2) = (1 - X)^2 = 1 - 2X + X^2$, donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer le noyau et l'image de f . Trouver l'équation que doivent vérifier a, b, c pour que le polynôme $Q = aX^2 + bX + c$ soit dans l'image de f .

Pour déterminer le noyau, résolvons le système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$

il est équivalent à $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ et à $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

soit $y = -2z$ et $x = z$. Le noyau est donc de dimension 1, engendré par exemple par $(X - 1)^2$.

D'après le théorème du rang l'image est de dimension $3 - 1 = 2$.

Les deux premières colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes, on a un système générateur de l'image $(1 - X^2, 1 - X)$ ou $(X^2 - 1, X - 1)$.

On cherche la condition pour que le système $\begin{cases} x + y + z = c \\ -y - 2z = b \\ -x + z = a \end{cases}$ ait des solutions.

Il est équivalent à $\begin{cases} x + y + z = c \\ -y - 2z = b \\ y + 2z = a + c \end{cases}$ et à $\begin{cases} x + y + z = c \\ -y - 2z = b \\ 0 = a + b + c \end{cases}$.

L'équation cherchée est donc $a + b + c = 0$.

Commentaires :

- ✓ ne pas oublier de donner le noyau et l'image sous forme de polynômes et pas seulement de leurs coordonnées dans la base canonique.
- ✓ la condition $a + b + c = 0$ est évidente, si Q est dans l'image, $Q = f(P)$ et $a + b + c = Q(1) = f(P)(1) = P(1 - 1) - 1P(0) = 0$,
- ✓ a, b, c sont des paramètres génériques (ce ne sont pas, contrairement à ce qu'ont cru certains, ceux du 1).

D. On considère les deux matrices

$$A := \begin{bmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 26 & -13 & 19 \\ 12 & -6 & 8 \end{bmatrix} \text{ et } B := \begin{bmatrix} 11 & -6 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \\ -12 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

1) Calculer les produits AB et BA .

Que constate-t-on ?

On trouve $AB=BA = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \\ 12 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

Les deux matrices commutent.

Commentaire : pour inspirer confiance au correcteur il faut être (ou paraître..) honnête, une erreur de calcul est possible dans un produit, **mais**, si un coefficient de AB est faux **il n'y a aucune raison** pour que le coefficient correspondant de BA soit faux, si cela est le cas le correcteur a tendance à penser (cas le plus favorable, il peut aussi penser que c'est un effet de voisinage) que vous avez lu la question suivante où il est dit $AB = BA$ et que vous n'avez fait qu'un calcul pour AB et mis BA au bluff. Ce n'est pas une bonne stratégie un correcteur méfiant ne passe pas grand-chose au bénéfice du doute. Si vous trouvez que le calcul est long, ne le faites pas et dites que vous admettez le résultat

2) Montrer que A admet 3 valeurs propres distinctes $a < b < c$.

On calcule le polynôme caractéristique, par exemple par la méthode de Sarrus :

$$\det (A - x Id) = (1 + x)x(2 - x)$$

Il y a donc 3 valeurs propres distinctes $-1 < 0 < 2$.

Commentaire : il n'est pas évident de « faire apparaître des zéros », c'est pourquoi la méthode Sarrus, assez décriée, est acceptable ici.

Voici (trouvée dans des copies) une façon de procéder possible

$$\det (A - x Id) = \begin{vmatrix} 6-x & -3 & 5 \\ 26 & -13-x & 19 \\ 12 & -6 & 8-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & -3 & 5 \\ -2x & -13-x & 19 \\ 0 & -6 & 8-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & -3 & 5 \\ 0 & -7-x & 9 \\ 0 & -6 & 8-c \end{vmatrix}$$

(on ajoute 2 fois la deuxième colonne à la première, puis -2 fois la première ligne à la deuxième ligne et on développe par rapport à la première colonne).

Les opérations du type précédent sont licites pour les calculs de déterminants, mais attention de ne pas le faire sur la matrice de départ, vous changez le polynôme caractéristique.

3) Montrer qu'il existe, et la déterminer, une matrice P dont les coefficients de la première ligne sont égaux à 1, telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Puisqu'il y a 3 valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable et on trouve P en cherchant une base de vecteurs propres.

Pour trouver un vecteur propre associé à la valeur propre -1 on résout le système

$$\begin{cases} 7x & -3y & +5z & = & 0 \\ 26x & -12y & +19z & = & 0 \\ 12x & -6y & 9z & = & 0 \end{cases}, \text{ on pivote sur la deuxième colonne (L2-4L1 et L3-2L1) et on a}$$

$$\begin{cases} 7x & -3y & +5z & = & 0 \\ -2x & & -z & = & 0 \\ -2x & & -z & = & 0 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} 7x & -3y & +5z & = & 0 \\ -2x & & -z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont $z = -2, y = -x$. Pour $x = 1$, on obtient le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

On fait de même pour les 2 autres valeurs propres et on trouve

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : si on cherche l'espace propre associé à un réel qui n'est pas valeur propre, on trouve (0), on a donc une vérification en cas d'erreur de calcul du polynôme caractéristique et/ou des valeurs propres.

4) Soit V un vecteur propre de A montrer que V est un vecteur propre de B (utiliser le fait que A et B commutent). En déduire sans calcul que $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale.

Facultatif : le vérifier en calculant effectivement $P^{-1}BP$.

Soit a réel tel que $AV = aV$. On a $A(BV) = (AB)V = (BA)V = B(AV) = B(aV) = aBV$.

On en déduit que BV est un vecteur propre de A associé à la valeur propre a . Comme l'espace propre est de dimension 1 engendré par V , il existe un réel b tel que $BV = bV$ et V est vecteur propre de B .

La base de vecteurs propres de A est donc une base de vecteurs propres de B et $P^{-1}BP$ est diagonale.

Vérification : en faisant le calcul on trouve

$$D2 := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E. Déterminer le réel t pour que le polynôme $X^3 - 7X + t$ ait trois racines dont l'une est le double d'une autre.

Appelons $a, 2a$ et b les 3 racines, on a alors

$$X^3 - 7X + t = (X - a)(X - 2a)(X - b) = X^3 - (3a + b)X^2 + (3ab + 2a^2)X - 2a^2b$$

L'égalité des coefficients donne

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ 3ab + 2a^2 = -7 \\ 2a^2b = t \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} b = -3a \\ -7a^2 = 7 \\ -6a^3 = t \end{cases} \text{ (on résout la première équation en } b \text{ et on reporte)}$$

on en déduit alors

$$\begin{cases} a = 1 & \Rightarrow & b = -3, t = -6 \\ a = -1 & \Rightarrow & b = 3, t = 6 \end{cases}$$

Erreur de lecture/compréhension de l'énoncé fréquente : considérer qu'on cherche un polynôme ayant une racine double (d'ordre 2).

Fin