Université Pierre et Marie Curie
Unité LM120

Lundi 4 Septembre 2006

Examen de Septembre

L'usage des calculatrices est interdit.
Merci d'éteindre téléphones portables et baladeurs.
Les exercices sont indépendants et ne sont pas classés par ordre de difficulté.

I

Donner la définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et montrer, en citant les résultats du cours utilisés, que si E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\dim(E) = \dim(F)$ et $E \subset F$, alors E et F sont égaux.

II

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique C=$\{e_1, e_2, e_3\}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{rlll} f(e_1) = & e_1 & + e_2 & +2e_3 \\ f(e_2) = & e_1 & +2e_2 & +3e_3 \\ f(e_3) = & 3e_1 & +6e_2 & +9e_3 \end{array}$$

1) Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{C}$.

2) Calculer le rang de la matrice M et en déduire la dimension du noyau de f.

3) Donner une base de l'image de l'application f.

4) Trouver une condition pour que le vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ soit dans le noyau de f. Donner une base du noyau de f.

III

Dans cet exercice, m est un nombre réel et on pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix}$. La transposée d'une matrice M sera notée au choix ${}^tM$ ou M^T

1) Donner la définition d'une matrice inversible. Vérifier que la matrice B est inversible et calculer son inverse.

2) Vérifier que, si la matrice M vérifie la condition $B^{-1}M = M\,{}^tB$, il en est de même de sa transposée ${}^tM$.

3) On suppose que $m = 0$ et on note $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^9$ formé des vecteurs $x = (a, b, c, d, e, f, g, h, i)$ tels que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ vérifie la condition $B^{-1}M = M\,{}^tB$.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^9$.

b) Ecrire les conditions que doivent satisfaire les nombres a, b, c, d, e, f, g, h, i pour que le vecteur $x = (a, b, c, d, e, f, g, h, i)$ appartienne à $\mathcal{E}$.

c) Déterminer la dimension de $\mathcal{E}$ et en donner une base.