Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies
MIME

Examen de l'UE LM120
Septembre 2005

La durée de l'examen est de deux heures. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Les notes de cours et de TD sont interdites. Les calculatrices, téléphones portables et tous autres gadgets électroniques susceptibles de stocker ou transmettre des informations doivent être éteints et rangés hors d'atteinte.

Question de cours (2 pts)
Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 1 (6pts)
On considère le système linéaire dépendant des paramètres réels *a*, *b*, *c* et du paramètre *m*

$$\begin{cases} x - my = a \\ mx + y = b \\ x + mz = c \end{cases}$$

1) À quelle(s) condition(s) sur le paramètre $m \in \mathbf{R}$ ce système admet-il une unique solution ? Quelle est-elle ?
2) Même question lorsque $m \in \mathbf{C}$.

Exercice 2 (8pts)
On considère une application linéaire u de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Quel est le rang de u ? Trouver une base du noyau de u ?

2) Mêmes questions pour application linéaire v de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques est la suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Calculer les matrices de $u \circ v$ et $v \circ u$. Quels sont les noyaux et images des applications $u \circ v$ et $v \circ u$?

Exercice 3 (4pts)
Montrer, sans les développer, que les déterminants ci-dessous sont nuls :

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix} \text{ et } D'=\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2+1 & (a+2)^2\\ b^2 & (b+1)^2+1 & (b+2)^2\\ c^2 & (c+1)^2+1 & (c+2)^2\end{vmatrix}.$$

Exercice 4 (6pts)

Soit la matrice $N \in M_n(\mathbf{R})$ et soit $P \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible telles que

$$N = P^{-1}DP$$

où $D=(a_{ii})$ est une matrice diagonale de $M_n(\mathbf{R})$.

1) Montrer que $\det N = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

2) A quelle condition la matrice N est-elle inversible ?

3) Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$N^p = P^{-1}D^pP.$$