

Examen LM120

27 Juin 2006

Les calculatrices et les documents sont interdits.

NB: La clarté de la présentation et la rigueur de chaque démonstration seront largement prises en compte lors de la correction.

Exercice 1 : (4 points). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire d'un espace E dans un espace F et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . En citant le résultat du cours approprié, montrer que l'on peut extraire de la famille $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ une sous-famille qui est une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 2 : (5 points). On considère le système d'équations suivant

$$\begin{cases} mx = 0 \\ x + my - z + t = 1 \\ x - y + mz - t = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

- a) Ecrire la matrice du système.
- b) Résoudre le système suivant la valeur de m .

Exercice 3 : (6 points). Soit E le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u_1 = (3, 0, -9)$, $u_2 = (-1, 3, 0)$ et $u_3 = (0, -1, 1)$.

- a) Trouver une base et la dimension de E .
- b) Déterminer une équation portant sur x , y et z et qui est vérifiée si et seulement si (x, y, z) appartient à E .
- c) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe $(3x - y, 3y - z, z - 9x)$. Vérifier que f est une application linéaire en donnant sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- d) Donner une famille génératrice de $\text{Im } f$. En déduire la dimension et une base de $\text{Im } f$.
- e) Trouver la dimension de $\text{Ker } f$ et déterminer une base de $\text{Ker } f$.

Exercice 4 : (5 points). On dit qu'une matrice A est nilpotente si l'une de ses puissances est nulle, c'est à dire s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

- a) Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$, est nilpotente.

- b) Même question pour

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) On considère la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Indication: on pourra écrire d'abord $D = 2I + N$ où I est la matrice identité 3×3 et N est nilpotente.