

**Examen de l'UE LM120
Juin 2005**

La durée de l'examen est de deux heures. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Les notes de cours et de TD sont interdites. Les calculatrices, téléphones portables et tous autres gadgets électroniques susceptibles de stocker ou transmettre des informations doivent être éteints et rangés hors d'atteinte.

Question de cours (2 pts)

Enoncer le théorème du rang

Exercice 1 (4pts)

- 1) Calculer $(2 - 2i)^2$
- 2) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2i + 1 = 0$.

Exercice 2 (4pts)

- 1) La famille de vecteurs de $\mathbf{R}^4$

$$e_1 = (4, 2, 1, 5), e_2 = (3, 1, 0, 2), e_3 = (1, 4, 2, 0), e_4 = (1, 3, 1, 1) \text{ et } e_5 = (2, 0, 1, 1)$$

est-elle libre ?

- 2) La famille de vecteurs de $\mathbf{R}^4$

$$u_1 = (0, 1, 3, 7), u_2 = (2, 0, 3, 6) \text{ et } u_3 = (1, 5, 2, 5)$$

est-elle génératrice ?

Exercice 3 (4pts)

Soit a un nombre réel, calculer le déterminant D de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-a & 2 & 3 \\ 2 & 3-a & 1 \\ 3 & 1 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Problème (11pts)

On considère l'application linéaire L de $\mathbf{R}^5$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$L(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5.$$

- 1) Quel est le rang de L ? (On pourra considérer par exemple le vecteur e_1 de $\mathbf{R}^5$ défini par $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$).
- 2) Quelle est la dimension du noyau de L ?
- 3) Trouver une base du noyau de L .

On considère maintenant le vecteur e_1 de $\mathbf{R}^5$ défini par $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ et l'application linéaire f de $\mathbf{R}^5$ dans $\mathbf{R}^5$ définie par

$$f(x) = x - L(x)e_1.$$

4) Déterminer le noyau et l'image de f . Quelles sont leurs dimensions ?

5) Trouver une base $\mathbf{B}$ de $\mathbf{R}^5$ telle que

- la matrice de l'application linéaire f dans cette base soit diagonale
- les éléments sur la diagonale soient des 0 ou des 1.