Université Pierre et Marie Curie

Examen LM120

8 Janvier 2007

Question de Cours : a) Donner la définition du rang d'une application linéaire.
b) Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire entre deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^m$. Montrer *sans utiliser le théorème du rang* que $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E_1)$.

Exercice 1 : Dans $\mathbf{R}^3$ on considère les vecteurs $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, a)$, $e_3 = (1, b, a)$ où a et b sont des paramètres réels.
a) Pour quelles valeurs de a et b la famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base ?
b) Determiner en fonction de a et b la dimension de $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.
c) Dans les cas où $\dim(E) < 3$, déterminer une ou plusieurs équations caractérisant les vecteurs (x, y, z) appartenant à E.

Exercice 2 : Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base $\mathbf{R}^3$. On note $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$, $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.
a) Ecrire la matrice A de T dans la base (e_1, e_2, e_3).
b) Déterminer la dimension de l'image et du noyau de cette application linéaire
c) On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) constitue une base de $\mathbf{R}^3$.
d) Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3.
e) Calculer la matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) vers la base (f_1, f_2, f_3) ainsi que son inverse P^{-1}.
f) Calculer la matrice B de T dans la base (f_1, f_2, f_3).

Exercice 3 : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 2, 3)$ et $e_2 = (2, 1, 0)$.
a) Quel est la dimension de E ?
b) Pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ calculer en fonction de x, y et z le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) En déduire une équation caractérisant les vecteurs (x, y, z) appartenant à E.