Université Pierre et Marie Curie – Paris 6	Examen du 1^{er} semestre
LM120 – Algèbre linéaire	17 janvier 2006 – 11h à 13h

Résoudre chaque problème sur une feuille séparée*. Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions doivent être rédigées de manière soignée. Lorsque des résultats non immédiats du cours sont utilisés, ils doivent clairement être énoncés.*

Problème I. (25 points)

1. Donner la définition du noyau d'une application lineaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et montrer que si $\ker f$ est reduit à 0, alors f est injective.

2. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^4$, indiquer s'il s'agit ou non d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et, le cas échéant, préciser sa dimension. On veillera à apporter une justification adéquate mais succinte.

(a) $F_1 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_4^2} \leq 1 \right\}$.

(b) $F_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4 \right\}$.

(c) $F_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } Ax = 0 \right\}$, où A est une matrice de taille 4×4 et de rang égal à 3.

3. Soient p, q, r, s les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$p = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ -\pi \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que q est une combinaison linéaire des vecteurs p, r et s. La famille $\{p, q, r, s\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

(b) Identifier $\text{vect}\{p, q, r, s\}$, le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre vecteurs.

Problème II. (25 points)

Soit A la matrice de taille 3×3 et b le vecteur de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -9 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système $Ax = b$ au moyen de la méthode du pivot de Gauss.

2. Calculer le déterminant de A.

3. Si B est une matrice de taille 3×3 et si $\det(B) = -2$, que peut-on dire avec certitude du rang de la matrice produit AB ? Justifier.

4. Calculer le produit AC où

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -9 & 7 & -23 \\ -4 & 3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Que peut-on en déduire concernant la matrice C ?

5. Les lignes de C forment-elles une famille libre ? Forment-elles une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

6. Calculer les coefficients du vecteur b dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée par les lignes (et non pas les colonnes) de A. On montrera pour ce faire que le résultat s'obtient par la multiplication Db pour une matrice D bien choisie que l'on indiquera.

Problème III. (25 points) Soit

$$E = \left\{ (a + bx + cx^2) \exp(-x) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies sur la droite réelle et ayant la forme d'un polynôme de degré deux que multiplie exponentielle de moins x.
Dans la suite, on identifiera toute fonction $u \in E$ avec le vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ qui la définit.

1. Vérifier que l'application F définie par $F(u) = u'$, qui envoie toute fonction u sur sa dérivée u', envoie l'ensemble E dans lui-même.

2. On appelle f l'application déduite de F au moyen de l'identification de E avec $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $f((a, b, c)) = (b - a, 2c - b, -c)$. En déduire que f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque : les questions 3 et suivantes peuvent se traiter en admettant les résultats de la question 2.

3. Déterminer la matrice A de l'application linéaire f pour le choix des bases canoniques de $\mathbb{R}^3$.

4. Caractériser l'image et le noyau de f.

5. Exprimer, en fonction de A, la matrice de l'application linéaire associée à l'application dérivée n$^{\text{ième}}$ de E dans E. Justifier.

6. On définit les matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer B^0, B, B^2 puis B^n pour tout $n \geq 3$.

(b) Trouver une relation simple entre A, B et I.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$A^n = (-1)^n \left(I - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right),$$

et en déduire les coefficients de la matrice A^n.
Indication : on pourra procéder par récurrence sur n, ou encore utiliser la formule du binôme de Newton.

7. Pour quelles valeurs de λ le système $(A - \lambda I)x = 0$ possède-t-il une solution autre que la solution nulle ? Lorsque c'est le cas, décrire l'ensemble de ses solutions.