Université Pierre et Marie Curie
Unité LM120

Lundi 4 Septembre 2006

Corrigé de l'examen de Septembre

I

Toutes les bases (c'est-à-dire les parties simultanément libres et génératrices) d'un espace vectoriel E ont le même nombre d'éléments, appelé la dimension de E.

Si E est un sous-espace vectoriel de dimension m de $\mathbb{R}^n$, et si B est une base de E, c'est une partie libre de E. Si de plus $E \subset F$, B est une partie libre de F. D'après le théorème de la base incomplète, il existe alors une base B' de F contenant B. Alors si $\dim(E) = \dim(F)$, B et B' ont toutes deux m éléments, donc coïncident. Et puisque $B = B'$ engendre E et engendre F, on a $E = F$.

II

1) La matrice M a pour colonnes les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ des images des vecteurs de la base $\mathcal{C}$. Donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

2) En appliquant l'algorithme de Gauss, on trouve :

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc deux colonnes de pivot (les deux premières). Il en résulte que M est de rang 2, et que l'image de f est engendrée par $f(e_1)$ et $f(e_2)$.

D'après le théorème du rang, on a

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Im(f)) + \dim(\ker(f)) = 2 + \dim(\ker(f))$$

donc $\dim(\ker(f)) = 1$.

3) Le calcul précédent a montré que $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment une base de $Im(f)$.

4) Si le vecteur (x, y, z) est dans le noyau de f on a :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 3z \\ x + 2y + 6z \\ 2x + 3y + 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par différence on en déduit $y + 3z = 0$ puis $x = 0$. Les vecteurs du noyau sont donc les vecteurs de la forme $(0, -3z, z)$. Et une base du noyau de f est formée du seul vecteur $(0, -3, 1)$.

III

1) Une matrice carrée B est inversible s'il existe une matrice N, appelée son inverse, qui vérifie $BN = NB = I$, où I est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

La solution du système $B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ce système est

$$\begin{cases} \quad v \qquad\qquad = x \\ \qquad\quad w \quad = y \\ u \ +mv \ -mw = z \end{cases}$$

qui se résout en $v = x$, $w = y$, $u = z - mv + mw = z - mx + my$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dont on déduit que B est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Si $B^{-1}M = M\,{}^tB$, on a ${}^tM\,{}^t(B^{-1}) = {}^t\big(B^{-1}M\big) = {}^t(M\,{}^tB) = {}^t({}^tB)\,{}^tM = B\,{}^tM$, et puisque l'inverse de ${}^tB$ est ${}^t(B^{-1})$, on obtient : ${}^tM({}^tB)^{-1} = B\,{}^tM$. En multipliant alors à gauche par B^{-1} et à droite par ${}^tB$ on obtient :

$$B^{-1}\,{}^tM = B^{-1}\,{}^tM({}^tB)^{-1}\,{}^tB = B^{-1}B\,{}^tM\,{}^tB = {}^tM\,{}^tB$$

ce qui montre que ${}^tM$ vérifie la même égalité que M.

3) *a)* La matrice nulle vérifie l'égalité précédente. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^9$ appartient donc à $\mathcal{E}$.

Si deux matrices M et M' vérifient toutes deux l'égalité précédente, on a

$$B^{-1}(M + M') = B^{-1}M + B^{-1}M' = M\,{}^tB + M'\,{}^tB = (M + M')\,{}^tB$$

ce qui montre que $M + M'$ vérifie l'égalité. On en déduit que si x et x' sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^9$ appartenant à $\mathcal{E}$, le vecteur $x + x'$ appartient à $\mathcal{E}$.

Finalement si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si M vérifie l'égalité, on a

$$B^{-1}(\lambda M) = \lambda(B^{-1}M) = \lambda(M\,{}^tB) = (\lambda M)\,{}^tB$$

ce qui montre que λM vérifie l'égalité, donc que si $x \in \mathbb{R}^9$ appartient à $\mathcal{E}$, il en est de même de λx.

Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^9$.

b) Puisque $m = 0$, on a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}$. On doit donc avoir, pour que x appartienne à $\mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire les neuf relations $g = b$, $h = c$, $i = a$, $a = e$, $b = f$, $c = d$, $d = h$, $e = i$ et $f = g$, donc $a = i = e$, $c = d = h$, $g = b = f$.

c) L'espace $\mathcal{E}$ est donc formé des vecteurs $x = (a, b, c, c, a, b, b, c, a)$. Il est de dimension 3 et possède comme base les vecteurs $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$.