

Examen de l'UE LM120
Septembre 2005

La durée de l'examen est de deux heures. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Les notes de cours et de TD sont interdites. Les calculatrices, téléphones portables et tous autres gadgets électroniques susceptibles de stocker ou transmettre des informations doivent être éteints et rangés hors d'atteinte.

Question de cours (2 pts)

Énoncer le théorème de la base incomplète.

Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^m$ et S une famille libre de vecteurs de F . Alors il existe une base B de F qui contient S .

Exercice 1 (6pts)

On considère le système linéaire dépendant des paramètres réels a, b, c et du paramètre m

$$\begin{cases} x - my & = a \\ mx + y & = b \\ x & + mz = c \end{cases}$$

1) À quelle(s) condition(s) sur le paramètre $m \in \mathbf{R}$ ce système admet-il une unique solution ? Quelle est-elle ?

On sait que le système a une solution unique si et seulement si le déterminant associé

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} \text{ est non nul. Développant par rapport à la dernière colonne on obtient}$$

$D = m(m^2 + 1)$. Et dans $\mathbf{R}$, D est non nul et donc le système a une unique solution si et seulement si $m \neq 0$.

Pour obtenir la solution, résolvons d'abord le système 2x2 formé par les deux premières équations, il est équivalent (méthode du pivot de Gauss) à

$$\begin{cases} x - my & = a \\ (1 + m^2)y & = b - ma \end{cases}$$

qui implique $y = \frac{b - ma}{(1 + m^2)}$ puis $x = a + my = a + \frac{mb - m^2a}{1 + m^2} = \frac{a + mb}{1 + m^2}$. La troisième équation

donne alors

$$z = \frac{c - x}{m} = \frac{c(1 + m^2) - ma - m^2b}{m(1 + m^2)}.$$

2) Même question lorsque $m \in \mathbb{C}$.

Le calcul du déterminant reste valable mais D est non nul si et seulement si $m \neq 0$ et $m \neq \pm i$.

Exercice 2 (8pts)

On considère une application linéaire u de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Quel est le rang de u ? Trouver une base du noyau de u ?

Considérons la matrice extraite formée des 3 dernières colonnes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, son

déterminant vaut -1 (développement par rapport à la dernière ligne), donc elle est de rang 3 et A est aussi de rang 3.

Le noyau de u est l'ensemble des (x, y, z, t) tels que

$$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

On déduit des deux premières équations $t = 0$ puis $y = -x$ et $z = -x$. Le noyau est de dimension 1 et une base est par exemple formée du vecteur $(-1, 1, 1, 0)$.

2) Mêmes questions pour application linéaire v de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques est la suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la 3^{ème} colonne est proportionnelle à la somme des deux premières, donc le rang est au plus 2, il est égal à 2 puisque les deux premières colonnes sont linéairement

indépendantes (on trouve facilement un déterminant extrait d'ordre 2 non nul $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$)

Pour avoir le noyau (de dimension 1 par le théorème du rang) on résout le système

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ qui est équivalent à } \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ dont les solutions vérifient } y=x \text{ et } z=2x.$$

Une base du noyau est par exemple formée du vecteur $(1,1,2)$.

3) Calculer les matrices de $u \circ v$ et $v \circ u$. Quels sont les noyaux et images des applications $u \circ v$ et $v \circ u$?

On effectue les produits AB et BA des matrices et on trouve pour $u \circ v$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et pour $v \circ u$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ces deux matrices sont de rang au plus 2 (B est de rang 2), et on trouve facilement un déterminant extrait d'ordre 2 non nul, elles sont d'ordre 2.

L'image de $u \circ v$ est engendrée par exemple par $(3,4,2)$ et $(1,0,0)$.

Celle de $v \circ u$ est engendrée par exemple $(1,1,0,0)$ et $(2,2,-1,-1)$ (ou $(0,0,1,1)$).

Noyau de $u \circ v$, comme la deuxième ligne est deux fois la troisième, on résout le système

$$\begin{cases} 3x+y-2z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \text{ qui est équivalent à } \begin{cases} z=2x \\ y=x \end{cases}. \text{ Une base est par exemple } \{(1,1,2)\}.$$

Noyau de $v \circ u$, compte tenu de l'égalité des lignes 1 et 2 d'une part et 3 et 4 de l'autre, on résout le système

$$\begin{cases} x+2y-z+2t=0 \\ -t=0 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x=-2y+z \\ t=0 \end{cases}.$$

Une base est par exemple $\{(-2,1,0,0), (1,0,1,0)\}$.

Exercice 3 (4pts)

Montrer, sans les développer, que les déterminants ci-dessous sont nuls :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \text{ et } D' = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2+1 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2+1 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2+1 & (c+2)^2 \end{vmatrix}.$$

Pour montrer la nullité de D on peut commencer par ajouter la colonne 3 à la colonne 2 on

$$\text{obtient } D = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & a+c \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & a+c \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

Pour celle de D' , on commence par développer les coefficients

$$D' = \begin{vmatrix} a^2 & a^2 + 2a + 2 & a^2 + 4a + 4 \\ b^2 & b^2 + 2b + 2 & b^2 + 4b + 4 \\ c^2 & c^2 + 2c + 2 & c^2 + 4c + 4 \end{vmatrix}, \text{ on retranche alors la première colonne aux suivantes et}$$

on a

$$D' = \begin{vmatrix} a^2 & 2a + 2 & 4a + 4 \\ b^2 & 2b + 2 & 4b + 4 \\ c^2 & 2c + 2 & 4c + 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ puisque la troisième colonne est deux fois la deuxième.}$$

Exercice 4 (6pts)

Soit la matrice $N \in M_n(\mathbf{R})$ et soit $P \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible telles que

$$N = P^{-1}DP$$

où $D = (a_{ii})$ est une matrice diagonale de $M_n(\mathbf{R})$.

1) Montrer que $\det N = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

On sait (cf cours) que le déterminant d'un produit est le produit des déterminants et que le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant, on a donc

$$\det N = \det P^{-1} \det D \det P = \frac{1}{\det P} \det D \det P = \det D.$$

Comme le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments de sa diagonale

(principale) on a $\det N = \det D = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

2) A quelle condition la matrice N est-elle inversible ?

La matrice N est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, si et seulement si

$\prod_{i=1}^n a_{ii} \neq 0$ si et seulement si aucun des a_{ii} n'est nul.

3) Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$N^p = P^{-1}D^pP.$$

Initialisation : la propriété est vraie pour $p = 0$ (avec la convention $N^0 = P^0 = Id$) (et aussi pour $p = 1$ d'après l'hypothèse initiale)

Hérédité : admettons la propriété pour $p \geq 0$ et montrons-la pour $p + 1$.

$N^{p+1} = N^p N = (P^{-1} D^p P) (P^{-1} D P)$ d'après l'hypothèse de récurrence et l'hypothèse initiale.

Grâce à l'associativité du produit de matrices

$$N^{p+1} = P^{-1} D^p (P P^{-1}) D P = P^{-1} D^p Id D P = P^{-1} D^{p+1} P$$

La propriété est donc vraie pour tout entier p .