Université Pierre et Marie Curie

Corrigé de l'examen LM120

27 Juin 2006

Exercice 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\{e_1,...,e_n\}$ une base de E, alors $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ est une partie génératrice de $f(E)$. Le théorème de la base extraite indique qu'on peut extraire de la famille $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ une base de F.

Exercice 2 :

a) Le système peut s'écrire sous la forme $A\,x = b$ où la matrice A du système est :

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Résolvons ce système par la méthode de Gauss (avec la matrice augmentée) :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{(m \neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & m & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & m & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & m & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & m-1 & 1 & 1-3m \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{(m \neq 1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & m-1 & 1 & 1-3m \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4+3m \end{pmatrix}$$

On trouve donc finalement si $m \neq 0$ et $m \neq 1$:

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= \dfrac{3(2-m)}{2(m-1)} + 3 \\ z &= \dfrac{3(2-m)}{2(m-1)} \\ t &= -2 - \dfrac{3}{2}m \end{cases}$$

Regardons alors le cas des valeurs singulières:
- si $m = 1$, on peut voir par la méthode de Gauss que le système est incompatible;
- si $m = 0$, le système est compatible mais indéterminé. L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \left(x, \frac{x}{2}, \frac{3x-6}{2}, \frac{x-4}{2} \right), \text{tels que } \; x \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 3 :

a) La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de E. On remarque que :

$$u_1 + 3u_2 + 9u_3 = (3 + 3.(-1) + 9.0, 0 + 3.3 + 9.(-1), -9 + 3.0 + 9.1) = (0,0,0) = 0_E$$

donc les trois vecteurs de cette famille sont linéairement dépendants, u_1 est combinaison linéaire de u_1 et u_2. Il est aisé de voir que (u_1, u_2) forment une famille libre, qui est également une famille génératrice, donc une base de E, qui est de ce fait de dimension 2.

b) Un vecteur v de coordonnées (x,y,z) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ appartient à E s'il existe λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, donc si :

$$\begin{cases} x &= 3\lambda_1 - \lambda_2 \\ y &= 3\lambda_2 \\ z &= -9\lambda_1 \end{cases}$$

Par substitution, on remarque que $3x = -z-y$ et donc que $3x+y+z = 0$. Réciproquement, si (x,y,z) vérifie $3x+y+z = 0$ alors en posant $\lambda_1 = \frac{-1}{9}z$ et $\lambda_2 = \frac{-1}{3}z$, on voit que $x = 3\lambda_1 - \lambda_2$, le système ci-dessus est satifait, donc $u = (x,y,z) \in E$.

c) La linéarité de f se démontre facilement. C'est une conséquence de la linéarité des fonctions coordonnées et de la linéarité d'une combinaison linéaire d'applications linéaires.
La matrice de f dans la base canonique est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les images des vecteurs i, j, k de la base canonique par f. Ainsi, $f(1,0,0) = (3,0,-9) = u_1$, $f(0,1,0) = (-1,3,0) = u_2$ et $f(0,0,1) = (0,-1,1) = u_3$ et la matrice M_f cherchée est :

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Comme (i, j, k) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, la famille image $(f(i), f(j), f(k))$ est une famille génératrice de $Im\, f = f(\mathbb{R}^3)$, donc (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de $Im\, f$. De la question a), on déduit que $Im\, f = E$ est de dimension 2 et (u_1, u_2) est une base.

e) si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $Im\, f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $Ker\, f$ dans E et donc

$$dimE = dimIm\, f + dimKer\, f = rg\, f + dimKer\, f\,.$$

Ceci s'applique à l'endomorphisme f, or $dim\mathbb{R}^3 = 3$ et on vient de montrer que $dimIm\, f = 2$, par conséquent, $dimKer\, f = 1$. Le noyau de f est une droite vectorielle.
$v = (x, y, z)$ est un élément de $Ker\, f$ si et seulement si $f(v) = O$, donc ssi :

$$3x - y = 3y - z = z - 9x = 0\,.$$

De ce système d'équations linéaires, on peut déduire que $3x - y = 3y - z = 0$ est aussi un système d'équations linéaires de $Ker\, f$ ainsi que $3x - y = z - 9x = 0$. Ainsi, $Ker\, f = \{(x, 3x, 9x), x \in \mathbb{R}\}$ et donc que le vecteur $(1, 3, 9)$ est une famille génératrice et donc une base de $Ker\, f$.

Exercice 4 :

a) Montrons que A est nilpotente d'indice 2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Montrons que B est nilpotente d'indice 3 :

$$B^3 = B\,B^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Remarquons que D s'écrit $2\,I + N$ avec N la matrice suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de la même forme que la matrice B précédente (avec $a = 1, b = 2, c = 1$). Comme les matrices I et N commutent, la formule du binôme s'applique et l'on a :

$$D^n = (2\,I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2\,I)^{n-k}\,N^k\,.$$

D'après la question b), N est nilpotente d'indice 3, seuls les trois premiers termes de cette somme sont nuls, $k = 0, 1, 2$. Il en résulte que :

$$D^n = C_n^0(2I)^n N^0 + C_n^1(2I)^{n-1}N^1 + C_n^2(2I)^{n-2}N^2$$

Or, $N^0 = I$, $N^1 = N$, $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, pour tout $n \geqslant 0$ entier. Il vient donc :

$$D^n = 2^n I + n\,2^{n-1} I\,N + n(n-1)2^{n-3}\,I\,N^2\,,$$

soit finalement :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n2^n + n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^{n-3}\begin{pmatrix} 8 & 4n & n(n+7) \\ 0 & 8 & 4n \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(Note : on aurait pu aussi traiter cet exercice en utilisant une récurrence sur n.)