Université Pierre et Marie Curie
Licence Sciences et Technologies
MIME

Examen de l'UE LM120
Juin 2005

La durée de l'examen est de deux heures. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Les notes de cours et de TD sont interdites. Les calculatrices, téléphones portables et tous autres gadgets électroniques susceptibles de stocker ou transmettre des informations doivent être éteints et rangés hors d'atteinte.

Question de cours (2 pts)
Enoncer le théorème du rang

Si f est une application linéaire de E espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel F, on a l'égalité
$\dim E = \operatorname{rang} f + \dim \ker f$.
Variante
Si f est une application linéaire de $E = \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$, on a l'égalité
$n = \dim E = \operatorname{rang} f + \dim \ker f$.

Exercice 1 (4pts)
1) Calculer $(2-2i)^2$

Développant par la formule du binôme on a $(2-2i)^2 = 4-8i-4 = -8i$.

2) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2i + 1 = 0$.
On a à trouver les racines d'un polynôme du second degré.
Le discriminant est $4-8i-4 = -8i = (2-2i)^2$ d'après la question précédente.
Les racines sont donc $\dfrac{2 \pm (2-2i)}{2}$, c'est-à-dire $2-i$ et i.

Exercice 2 (4pts)
1) La famille de vecteurs de $\mathbf{R}^4$

$$e_1 = (4,2,1,5),\ e_2 = (3,1,0,2),\ e_3 = (1,4,2,0),\ e_4 = (1,3,1,1) \text{ et } e_5 = (2,0,1,1)$$

est-elle libre ?
La famille n'est pas libre puisqu'elle contient 5 vecteurs de $\mathbf{R}^4$ qui est de dimension 4.

2) La famille de vecteurs de $\mathbf{R}^4$

$$u_1 = (0,1,3,7),\ u_2 = (2,0,3,6) \text{ et } u_3 = (1,5,2,5)$$

est-elle génératrice ?

La famille n'est pas génératrice puisqu'elle est composée de 3 vecteurs de $\mathbf{R}^4$ qui est de dimension 4.

Exercice 3 (4pts)

Soit a un nombre réel, calculer le déterminant D de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-a & 2 & 3 \\ 2 & 3-a & 1 \\ 3 & 1 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Pour calculer D, commençons par ajouter les deux dernières colonnes à la première

$$D = \begin{vmatrix} 1-a & 2 & 3 \\ 2 & 3-a & 1 \\ 3 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-a & 2 & 3 \\ 6-a & 3-a & 1 \\ 6-a & 1 & 2-a \end{vmatrix} = (6-a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-a & 1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix}.$$

On retranche alors la première ligne aux deux suivantes

$$D = (6-a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-a & -2 \\ 0 & -1 & -1-a \end{vmatrix} = (6-a)\begin{vmatrix} 1-a & -2 \\ -1 & -1-a \end{vmatrix}.$$

Finalement $D = (6-a)\left(a^2 - 1 - 2\right) = (6-a)\left(a^2 - 3\right)$.

(on pourrait développer mais est-ce utile, si ce qui intéresse c'est de savoir si la matrice est inversible ? ou factoriser mais il faut savoir sur quel corps on travaille).

Remarque : la matrice étant symétrique on aurait pu faire les mêmes opérations sur les lignes.

Problème (11pts)

On considère l'application linéaire L de $\mathbf{R}^5$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$L(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5$.

1) Quel est le rang de L ? (On pourra considérer par exemple le vecteur e_1 de $\mathbf{R}^5$ défini par $e_1 = (1,0,0,0,0)$) .

Le rang de L est au moins 1 car L n'est pas l'application nulle ($L(e_1) = 1 \neq 0$) et au plus 1 car $\mathbf{R}$ est de dimension 1, donc il est égal à 1.

2) Quelle est la dimension du noyau de L ?

Appliquant le théorème du rang et la question précédente on trouve que cette dimension est 5 – 1 = 4.

3) Trouver un base du noyau de L.

Le noyau est le sous-espace vectoriel des vecteurs vérifiant $x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$.

Considérons les vecteurs (obtenus en prenant les 4 dernières coordonnées nulles sauf une égale à 1)

$v_1 = (-3,1,0,0,0)$

$v_2 = (-4,0,1,0,0)$

$v_3 = (-2,0,0,1,0)$

$v_4 = (-1, 0, 0, 0, 1)$.

Ils forment un système libre (à cause du choix des quatre dernières coordonnées) à 4 éléments, dans le noyau qui est de dimension 4, ils en forment donc une base.
Remarque : il y a bien sûr une infinité d'autres bases.

On considère maintenant le vecteur e_1 de $\mathbf{R}^5$ défini par $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ et l'application linéaire *f* de $\mathbf{R}^5$ dans $\mathbf{R}^5$ définie par
$f(x) = x - L(x)e_1$.
4) Déterminer le noyau et l'image de *f*. Quelles sont leurs dimensions ?

Noyau de *f* : c'est l'ensemble des éléments tels que $x - L(x)e_1 = 0$ ou $x = L(x)e_1$. Ces éléments sont donc de la forme ae_1 (*a* réel) et on a $f(ae_1) = ae_1 - aL(e_1)e_1 = a(1-1)e_1 = 0$. Le noyau est donc le sous-espace vectoriel engendré par e_1. Il est de dimension 1.
Prenons la base trouvée en 3) du noyau de *L*. On a pour *i* = 1, 2, 3, 4
$f(v_i) = v_i - L(v_i)e_1 = v_i$ puisque $L(v_i) = 0$. $\mathrm{Im}(f)$ est donc engendrée par les v_i, le système est libre (c'est une base du noyau de *L*) c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ qui est de dimension 4.
Remarques
- on aurait pu raisonner avec n'importe quelle base de Ker *L*
- on n'a pas besoin du théorème du rang.

5) Trouver une base ***B*** de $\mathbf{R}^5$ telle que
- la matrice de l'application linéaire *f* dans cette base soit diagonale
- les éléments sur la diagonale soient des 0 ou des 1.

L'énoncé incite à chercher des vecteurs *x* tels que *f* (*x*) = 0 (donc dans le noyau) ou tels que *f* (*x*) = *x* (on en connaît : les v_i).
Considérons le système $\boldsymbol{B} = (e_1, v_1, v_2, v_3, v_4)$, il est libre puisque la matrice des coordonnées relatives à la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (déterminant 1). C'est donc une base de $\mathbf{R}^5$.

Les calculs précédents montrent que dans cette base la matrice de *f* est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : il valait mieux lire attentivement l'énoncé et le suivre de près plutôt que de se lancer dans la résolution standard avec recherche des valeurs propres en calculant le polynôme caractéristique. L'énoncé vous suggérait de commencer par les valeurs propres 0 ou 1, et on constatait qu'il ne pouvait pas y en avoir d'autres.

A propos du barème : il est sur 25, multiplié par 3 cela donne une note sur 75. En ajoutant le contrôle continu sur 25 on arrive bien à un total de 100.

