

Corrigé

Problème I.

1. Le noyau de f , noté $\ker f$ est l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f est le vecteur nul de $\mathbb{R}^m$. Autrement écrit,

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n \quad \text{t.q.} \quad f(x) = 0\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ car il contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ et est stable par combinaisons linéaires. En effet, si $u, v \in \ker f$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, par linéarité de f on a

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = 0$$

de sorte que $\alpha u + \beta v \in \ker f$. Pour montrer que f est injective si $\ker f$ est réduit à zéro, on suppose que $f(u) = f(v)$ pour u et v dans $\mathbb{R}^n$ et par linéarité de f on en déduit que $f(u - v) = 0$. En conséquence, $u - v$ est dans le noyau de f , et comme celui-ci est réduit à zéro on obtient $u = v$.

2. (a) Non, F_1 n'est pas stable par multiplication scalaire. (b) Oui, il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, -1, 1, -1)$, il est de dimension 1. (c) Oui, il s'agit du noyau de A qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (cfr. 1), il est de dimension 1 en vertu du théorème du rang.

3. (a) On vérifie que $q = \pi(p + r - s)$. La famille $\{p, q, r, s\}$ est par conséquent liée, elle n'est pas libre. Elle ne peut donc pas non plus être génératrice, puisqu'elle contient 4 vecteurs qui ne forment pas une famille libre.

(b) Il s'agit du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des vecteurs dont la somme des quatre composantes est égale à zéro.

Problème II

1. On obtient $x = (1 - 1 - 1)$.

2. $\det A = 1$.

3. On a alors $\det(AB) = \det(A) \det(B) = 1(-2) = -2 \neq 0$ de sorte que AB est inversible et donc de rang plein. Ainsi, le rang de AB vaut 3.

4. La matrice AC est égale à la matrice identité. La matrice C est par conséquent la matrice inverse de A .

5. Puisque C est inversible, ses lignes forment une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

6. Il s'agit de résoudre le système $A^T y = b$, dont la solution est donnée par $y = (A^T)^{-1} b = (A^{-1})^T b = C^T b$. On obtient alors $y = Db$ avec $D = C^T$, ce qui donne $y = (-49, 39, -123)$.

Problème III

1. Si $u \in E$,

$$u(x)' = (a + bx + cx^2)' * \exp(-x) + (a + bx + cx^2) * \exp(-x)' = ((b - a) + (2c - b)x - cx^2) \exp(-x)$$

se trouve donc bien être un élément de E .

2. L'expression de f suit du calcul ci-dessus. Sa linéarité se vérifie de manière un peu fastidieuse mais sans difficulté.

$$3. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice A est inversible puisque $\det(A) = -1$. Par conséquent, le noyau et l'image de A sont confondus avec $\mathbb{R}^3$ tout entier.

5. Il s'agit de A^n , car la matrice d'une composition d'applications linéaires s'obtient en faisant le produit des matrices de chacune d'elles. Ici, la dérivée nième n'est autre que la composée de n opérations de dérivée.

6. (a) B^0 est l'identité, $B^1 = B$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $n \geq 3$ on a $B^n = 0$.

(b) $A = -I + B$.

(c) On utilise la formule du binôme de Newton (les matrices B et $-I$ commutant) :

$$(B + (-I))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k * (-I)^{n-k} = (-1)^n I + (-1)^{n-1} nB + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2,$$

la somme s'arrêtant là puisque les termes contenant B^k avec $k \geq 3$ sont tous nuls en vertu du point (a). On obtient le résultat en plaçant $(-1)^n$ en facteur.

7. Il s'agit de déterminer les valeurs propres de A , qui se trouvent sur sa diagonale puisque A est triangulaire. La seule valeur propre est donc $\lambda = -1$, et $\ker(A - (-1)I) = \ker(A + I) = \ker(B)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ formé par tous les vecteurs dont les deux dernières composantes sont nulles.