

Fiche mémo fonction vectorielle

1. Dérivée d'une fonction composée
2. Fonction vectorielle en coordonnées cartésienne
3. Fonction vectorielle en coordonnées polaires
4. Dérivées des fonctions vectorielles

(Rappel de cours)

Dérivée d'une fonction composée

Soient deux fonctions f et g de la variable réelle, f étant définie sur un intervalle I et g sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors on définit la fonction composée $g \circ f$ par :

$$\forall x \in I \quad g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Si la fonction f est dérivable en x et la fonction g en $f(x)$ alors la fonction composée est dérivable en x et on a :

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]f'(x).$$

Notation

En physique, on note la dérivée d'une fonction x de la variable t sous la forme $\frac{dx}{dt}$.

Si la variable est le temps on notera aussi la dérivée par rapport à t sous la forme : $\dot{x}$

(Exercice énoncé)

Dérivée d'une fonction composée

Ex Etant donnée une fonction θ de la variable réelle t ; donner les dérivées des fonctions composées suivantes

$$f(t) = \cos\theta(t) \quad \text{et} \quad g(t) = ae^{-\omega t} ; a \text{ et } \omega \text{ étant des constantes réelles.}$$

(Exercice corrigé)

Dérivée d'une fonction composée

$$\text{On a } f'(t) = -\sin\theta(t) \cdot \theta'(t) \quad \text{et} \quad g'(t) = -\omega ae^{-\omega t}$$

(Rappel de cours)

Fonction vectorielle en coordonnées cartésiennes

Une fonction vectorielle est une application qui associe un vecteur à un nombre réel. Nous utiliserons des fonctions vectorielles à valeurs dans le plan ou dans l'espace munis d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour le plan et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pour l'espace.

$$\begin{array}{ccc} \vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^2 & & \vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} & \text{ou} & t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Où x, y et z sont des fonctions réelles de la variable réelle

L'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ ou $(x(t), y(t), z(t))$ lorsque t décrit I est appelée courbe paramétrée.

En cinématique, la variable t représente le temps, le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ est appelé vecteur position et la courbe paramétrée est appelée trajectoire de M .

(Exercice énoncé)

Fonction vectorielle en coordonnées cartésiennes

Ex Déterminer la trajectoire de M dans chacun des cas suivants :

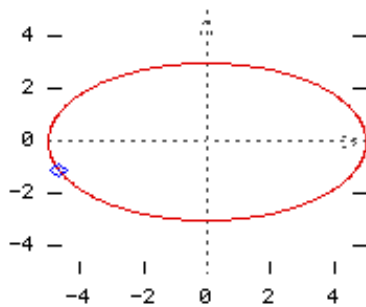
$$\begin{array}{ll} \text{a) } \vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{b) } \vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} & t \rightarrow \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ t \end{pmatrix} \end{array}$$

(Exercice corrigé)

Fonction vectorielle en coordonnées cartésiennes

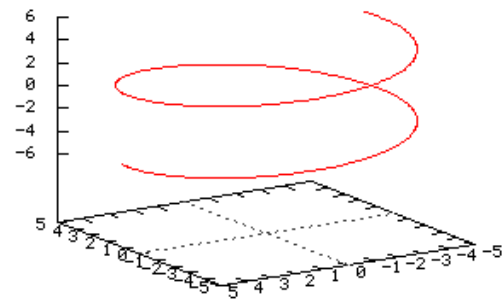
a) La trajectoire est une ellipse si a et b sont égaux, c'est un cercle. Comme les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π , quand le temps a augmenté de 2π , le mobile repasse au même endroit de la trajectoire

$$x = 5\cos(t), y = 3\sin(t)$$



b) La trajectoire est une hélice de rayon a et d'axe vertical. Ici le mouvement n'est pas périodique, et sa projection sur le plan (O,x,y) est un cercle.

$$--\{ 5\cos(t), 5\sin(t), t \}--$$



(Rappel de cours)

Fonction vectorielle en coordonnées polaires, cylindriques

On peut également définir une courbe paramétrée, ou le mouvement d'un mobile, dans différents systèmes de coordonnées.

<u>Type de coordonnée</u>	<u>Coordonnées polaires</u>	<u>Coordonnées cylindriques</u>
Repère orthonormé direct	$(O, \vec{i}, \vec{j})$	$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}),$
Coordonnées de $M(t)$	$(r(t); \theta(t))$	$(r(t); \theta(t); z(t))$
Composante de $\overrightarrow{OM(t)}$ dans le repère choisi	$(r(t)\cos\theta(t); r(t)\sin\theta(t))$	$(r(t)\cos\theta(t); r(t)\sin\theta(t); z(t))$
En cinématique	on note $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire de direction $\overrightarrow{OM(t)}$. C'est-à-dire que $(\overrightarrow{u_r}, \vec{i}) = \theta(t)$. Et donc $\overrightarrow{u_r} = \cos\theta(t)\vec{i} + \sin\theta(t)\vec{j}$, $\overrightarrow{OM(t)} = r(t)\overrightarrow{u_r}$	Soit $m(t)$ le projeté orthogonal de M sur le plan horizontal. On note $\overrightarrow{u_r(t)}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{Om(t)}$. On a $\overrightarrow{OM(t)} = r(t)\overrightarrow{u_r(t)} + z(t)\vec{k}$.
	figure	figure

(Exercice énoncé)

Fonction vectorielle en coordonnées polaires

Ex1 Déterminer la trajectoire de M dans chacun des cas suivants. On précisera si le mouvement est périodique et dans ce cas on donnera la valeur de la période.

La courbe est donnée en coordonnées polaires dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par :

a) $\rho(t) = a$ et $\theta(t) = 2\pi\omega t$

b) $\rho(t) = t$ et $\theta(t) = \frac{\pi}{7}$

Ex2 Déterminer la trajectoire de M . On précisera si le mouvement est périodique et dans ce cas on donnera la valeur de la période. La courbe est donnée en coordonnées cylindriques dans

l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$\rho(t) = a ; \theta(t) = \omega t \text{ et } z = t$$

(Exercice corrigé)

Fonction vectorielle en coordonnées polaires et cylindriques.

Ex1. a) le rayon reste constant et l'angle varie, la trajectoire est un cercle. Le mouvement est périodique. Un tour complet est parcouru lorsque $2\pi\omega t = 2\pi$; c'est-à-dire au bout d'un temps $T = 1/\omega$.

b) Ici c'est l'angle qui est constant et le rayon qui varie, en restant positif, la trajectoire est la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{u}$, tel que $(\vec{i}, \vec{u}) = \pi/7$. Le mouvement n'est pas périodique.

Ex2 La trajectoire est une hélice, le mouvement n'est pas périodique.

(Rappel de cours)

Dérivées des fonctions vectorielles

Soit une fonction vectorielle qui au réel t associe le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ dans un repère orthonormé direct, les fonctions x , y et z étant dérivables, alors le vecteur dérivée $\overrightarrow{f'(t)}$ a pour coordonnées dans le même repère $(x'(t), y'(t), z'(t))$

Cinématique Si $\overrightarrow{OM(t)}$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ dans un repère orthonormé direct définit le mouvement d'un point ; alors la vitesse de ce point est donnée par : $\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$; c'est le vecteur qui a pour coordonnées dans le même repère $(x'(t), y'(t), z'(t))$.

De même, l'accélération de ce point est donnée par : $\overrightarrow{\gamma(t)} = \frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}$; c'est le vecteur qui a pour coordonnées dans le même repère $(x''(t), y''(t), z''(t))$.

Cas particulier Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, calculons la dérivée d'un vecteur unitaire faisant un angle $\theta(t)$ avec $\vec{i}$ (c'est-à-dire tel $(\vec{i}, \vec{u}) = \theta$) :

On a : $\overrightarrow{u(t)} = \cos\theta(t)\vec{i} + \sin\theta(t)\vec{j}$ et le vecteur dérivée est :

$$\overrightarrow{u'(t)} = -\theta' \sin\theta(t)\vec{i} + \theta' \cos\theta(t)\vec{j}$$

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{u'(t)}$ forme donc avec $\vec{i}$ un angle α tel que $\cos \alpha = -\sin\theta$ et $\sin \alpha = \cos\theta$. On a donc $\alpha = \theta + \pi/2$.

Figure

Cas des coordonnées polaires

Soit le mouvement d'un point $M(t)$ donné par ses coordonnées polaires $(r(t); \theta(t))$

Notons $\overrightarrow{u_r(t)}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM(t)}$. On a $\overrightarrow{OM(t)} = r(t)\overrightarrow{u_r(t)}$.

La vitesse est donnée par

$$\overrightarrow{v(t)} = r'(t)\overrightarrow{u_r(t)} + r(t)\theta'\overrightarrow{u_\theta(t)} \text{ où } \overrightarrow{u_\theta(t)} \text{ est un vecteur unitaire perpendiculaire à } \overrightarrow{u_r(t)}$$

Cas des coordonnées cylindriques

Soit le mouvement d'un point $M(t)$ donné par ses coordonnées cylindriques $(r(t); \theta(t); z(t))$

Soit $m(t)$ le projeté orthogonal de M sur le plan horizontal. Notons $\overrightarrow{u_r(t)}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{Om(t)}$. On a $\overrightarrow{OM(t)} = r(t)\overrightarrow{u_r(t)} + z(t)\vec{k}$.

La vitesse est donnée par

$$\overrightarrow{v(t)} = r'(t)\overrightarrow{u_r(t)} + r(t)\theta'\overrightarrow{u_\theta(t)} + z'(t)\vec{k} \text{ où } \overrightarrow{u_\theta(t)} \text{ est un vecteur unitaire directement perpendiculaire à } \overrightarrow{u_r(t)}$$

(Exercice énoncé)

Dérivées des fonctions vectorielles

Ex 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le mouvement d'un point $M(t)$ donné par ses coordonnées polaires $(r(t); \theta(t))$

Notons $\overrightarrow{u_r(t)}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM(t)}$. et $\overrightarrow{u_\theta(t)}$ ment perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r(t)}$.

Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération du mobile dans le repère orthonormé direct $(\overrightarrow{u_r(t)}; \overrightarrow{u_\theta(t)})$.

Ex 2. On considère le mouvement d'un point donné par ses coordonnées cylindriques $(r(t); \theta(t); z(t))$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner l'expression de la vitesse et de l'accélération du mobile dans le repère orthonormé direct $(\overrightarrow{u_r(t)}; \overrightarrow{u_\theta(t)}; \vec{k})$.

(Exercice corrigé)

Dérivées des fonctions vectorielles

Ex 1 .

On a vu dans le rappel de cours $\overrightarrow{v(t)} = r'(t)\overrightarrow{u_r(t)} + r(t)\theta'\overrightarrow{u_\theta(t)}$

On note plus rapidement $\vec{v} = r'\overrightarrow{u_r} + r\theta'\overrightarrow{u_\theta}$

Le vecteur accélération est obtenu en dérivant à nouveau ,

notez que la dérivée de $\overrightarrow{u_\theta(t)}$ est $-\theta'\overrightarrow{u_r(t)}$

$$\overrightarrow{\gamma(t)} = r''\overrightarrow{u_r} + 2r'\theta'\overrightarrow{u_\theta} + r\theta''\overrightarrow{u_\theta} - r\theta'^2\overrightarrow{u_r(t)} = (r'' - r\theta'^2)\overrightarrow{u_r(t)} + (2r'\theta' + r\theta'')\overrightarrow{u_\theta(t)}$$

Ex 2

La vitesse est donnée par

$\overrightarrow{v(t)} = r'(t)\overrightarrow{u_r(t)} + r(t)\theta'\overrightarrow{u_\theta(t)} + z'(t)\overrightarrow{k}$ où $\overrightarrow{u_\theta(t)}$ est un vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r(t)}$

Et le calcul de l'accélération donne :

$$\overrightarrow{\gamma(t)} = (r'' - r\theta'^2)\overrightarrow{u_r(t)} + (2r'\theta' + r\theta'')\overrightarrow{u_\theta(t)} + z''(t)\overrightarrow{k}$$

REf

<http://www.mathcurve.com/>